



# Quelques développements combinatoires autour des groupes de Coxeter et des partitions d'entiers

Mathias Petreolle

## ► To cite this version:

Mathias Petreolle. Quelques développements combinatoires autour des groupes de Coxeter et des partitions d'entiers. Combinatoire [math.CO]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2015. Français. NNT : 2015LYO10237 . tel-01325290

**HAL Id: tel-01325290**

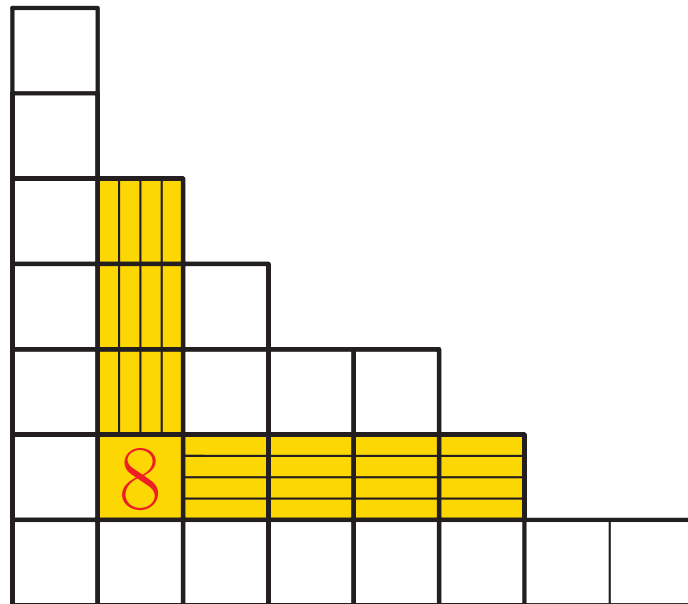
**<https://theses.hal.science/tel-01325290>**

Submitted on 2 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Quelques développements combinatoires autour des groupes de Coxeter et des partitions d'entiers



Mathias Pétréolle  
Thèse de doctorat



École doctorale **InfoMath**, ED 512

Spécialité : **Mathématiques**

N. d'ordre 237–2015

# Quelques développements combinatoires autour des groupes de Coxeter et des partitions d'entiers

## Thèse de doctorat

Soutenue publiquement le 25 Novembre 2015 par

**Mathias Pétréolle**

devant le jury composé de :

Monsieur Boris Adamczewski	Université de Lyon	Examineur
Madame Mireille Bousquet-Mélou	Université de Bordeaux	Examinatrice
Monsieur Guo-Niu Han	Université de Strasbourg	Rapporteur
Monsieur Frédéric Jouhet	Université de Lyon	Directeur de thèse
Monsieur Christian Krattenthaler	Université de Vienne	Rapporteur
Monsieur Vincent Pilaud	Université de Paris-Saclay	Examineur



*Alle Menschen werden Brüder  
Wo dein sanfter Flügel weilt.*

---

Ode an die Freude, Schiller (1785)



## Remerciements

Que cette thèse soit l'occasion pour moi de remercier diverses personnes qui ont joué un rôle dans mon entourage ces dernières années. Évidemment, ces remerciements ne sauraient prétendre à l'exhaustivité, et je m'excuse d'avance auprès de ceux qui ne trouveraient pas leur nom par la suite.

Ces remerciements ne peuvent pas commencer autrement que par Frédéric, qui non content de m'introduire à ce domaine si élégant de la combinatoire énumérative lors de mes études, a par la suite accepté d'encadrer ma thèse sur le sujet. Qu'il soit ici remercié pour sa volonté de me transmettre ses connaissances, sa patience envers mes étourderies rédactionnelles, et ses relectures vigilantes.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes rapporteurs Guo-Niu Han et Christian Krattenthaler pour avoir accepté de relire mon manuscrit avec beaucoup de soin, mais aussi pour les moments que nous avons pu partager en conférences.

Enfin, je remercie Boris Adamczewski, Mireille Bousquet-Mélou et Vincent Pilaud d'avoir bien voulu prendre sur leur temps pour me faire l'honneur de participer à mon jury.

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe Combinatoire et Théorie des nombres de l'Institut Camille Jordan, dont je remercie l'intégralité des membres avec qui j'ai pu interagir, que ce soit pour le séminaire, autour d'un café, ou lors de discussions mathématiques. J'ai une pensée particulière pour Philippe Nadeau et ses commentaires toujours pertinents, en particulier sur les automates finis et les éléments pleinement commutatifs.

Cette thèse ne serait sans doute pas la même si je ne l'avais pas effectuée au sein d'un bureau si particulier du bâtiment Braconnier, le bureau 219. Outre ses si réputés mercredi/vendredi-gâteaux, j'y ai trouvé une ambiance particulièrement accueillante, permettant de toujours aller au laboratoire avec le sourire. J'y ai croisé différents joyeux drilles, toujours prêt à parler d'enseignement, ou encore à aider sur un exercice de mathématiques, voire sur un problème de recherche. Certains sont à présent disparus ; je pense à Alain, Alexis, Jean-Baptiste, Zeya, et Zhicong. D'autres sont toujours là, bien qu'en instance de départ, comme Corentin, le compère des débuts, ou encore Benjamin et Hassan. Enfin, de petits nouveaux prennent la relève : Maxime, Petit Hugo, Simon et Yannick. Je compte sur vous pour continuer à maintenir l'atmosphère de ce bureau, pour laquelle je vous remercie énormément !

J'ai aussi une pensée affectueuse pour le groupe (étendu) des doctorants de 11h37. Cette thèse eut été probablement très différente si vous n'aviez pas été là : Agathe, Benjamin, le petit Benoit, Bérénice, Bloup et sa grosse assise, les deux Cécile, Colin, Coline, Élodie, François le G., François le troisième, Hadrianne et son Georges, Jean-Cyrille, Le Stagiaire, Maxime (bis), Mini-Bloup, Niccolo, Nils, Simon, Thomas Narquois et Xiaolin. Nous avons beaucoup partagé ensemble, notamment



lors du Séminaire de Probabilités Alternatives, que ce soit des excursions en randonnées et à la plage, des hostilités et de la précision, des jeux et un Dixit, des quatre-vingt-dix-pique<sup>1</sup> et des 150-barrières-mais-faits, du Georges Brassens et des barracudas, du Giedré et des saucisses ; et je vous dis à tous merci pour ces moments.

C'est maintenant le moment de penser aux amis qui ont fréquentés le 326, Rue Garibaldi<sup>2</sup> durant ces dernières années, et en premier lieu tous les colocataires des premiers temps : Juuuuulllien, Maxime, Vlanore, et le professeur Watier. Je n'oublie pas tous les autres, dont les visites sont toujours plaisantes et très animées : Anael et son salon, Clément et sa tartine, Élie et ses cheveux, Étienne et ses cubes, Lambin et sa chance, Petit Thomas et son couteau, Rémi et son impérialisme, Robin et son chapeau, Sam et ses mouches, Vincent et son genou. Revenez quand vous voulez, et que fait-on cet été ?

J'en viens à la famille, qui m'a toujours soutenu durant ces années, et ce même si je ne les ai pas vu la moitié de ce qu'ils auraient voulu. Je leur en suis très reconnaissant.

Enfin, toute chose étant plus belle lorsqu'elle est cyclique, ces remerciements se doivent de terminer par là où ils ont débuté. Merci donc à toi, Frédéric, dont la présence à mes côtés me réjouit au plus haut point depuis maintenant quatre ans déjà !

---

1. Que ça fait bizarre de l'écrire et non pas de l'énoncer..

2. et son interphone

## Table des matières

Remerciements	7
Chapitre 1. Introduction	11
Avant-propos	11
Contenu de la thèse	14
Chapitre II	14
Chapitre III	14
Chapitre IV	15
Chapitre V	15
Chapitre VI	15
Chapitre VII	16
Chapitre 2. Définitions et notations	17
1. Combinatoire énumérative	17
1.1. Partitions d'entiers	17
1.2. Séries génératrices	19
1.3. Une excursion dans le monde des chemins	21
2. Combinatoire algébrique	22
2.1. Groupes de Coxeter	22
2.2. Systèmes de racines et identités de Macdonald	23
2.3. Ensembles partiellement ordonnés	25
Chapitre 3. Formules de type Nekrasov-Okounkov	27
1. Introduction	27
2. Étude de familles de $t$ -cores	30
2.1. Une bijection entre les $t$ -cores et certains vecteurs d'entiers	30
2.2. Les $t$ -cores auto-conjugués	31
2.3. Les $t$ -cores de partitions à parts distinctes doublées	31
2.4. Une fonction génératrice simple pour $SC_{(t)} \times DD_{(t)}$	32
3. Une formule de Nekrasov-Okounkov en type $\widetilde{C}$	33
3.1. La bijection $\varphi$ entre paires de $(t+1)$ -cores et vecteurs d'entiers relatifs	34
3.2. Simplification des coefficients	37
3.3. Fin de la preuve du Théorème 3.1	43
3.4. Quelques applications et adaptations aux types $\widetilde{B}$ et $\widetilde{BC}$	46
3.5. Raffinement d'un résultat dû à Kostant	47
4. Le cas du type $\widetilde{C^\vee}$	48
4.1. Les $t$ -cores auto-conjugués	49
4.2. Une bijection entre $(2t)$ -cores auto-conjugués et des vecteurs d'entiers relatifs	50
4.3. Dernières étapes de la preuve du Théorème 3.24	52
4.4. Quelques applications et généralisations aux autres types	56

5. Quelques remarques et questions pour conclure...	57
Chapitre 4. Extensions via la décomposition de Littlewood	59
1. Introduction	59
2. De nouvelles propriétés de la décomposition de Littlewood	60
2.1. La décomposition de Littlewood	60
2.2. Cas des partitions à parts distinctes doublées	62
2.3. Cas des partitions auto-conjuguées	66
3. Des généralisations grâce à la décomposition de Littlewood	68
3.1. Une première généralisation du Théorème 3.1	68
3.2. Une autre généralisation du Théorème 3.1	72
3.3. Deux généralisations du Théorème 3.24	75
Chapitre 5. Éléments cycliquement pleinement commutatifs dans les groupes de Coxeter	81
1. Introduction	81
2. Éléments cycliquement pleinement commutatifs et empilements	82
2.1. Éléments cycliquement pleinement commutatifs	82
2.2. Empilements et éléments pleinement commutatifs	82
2.3. Clôtures cylindriques des empilements et éléments cycliquement pleinement commutatifs	84
3. Les types $\tilde{A}$ et $A$	90
3.1. Caractérisation en type $\tilde{A}_{n-1}$	90
3.2. Caractérisation et énumération en type $A_{n-1}$	91
3.3. Énumération en type $\tilde{A}_{n-1}$	93
4. Les autres types finis et affines	95
4.1. Les types $\tilde{C}_n$ et $B_n$	96
4.2. Les types $\tilde{B}_{n+1}$ et $D_{n+1}$	102
4.3. Le type $\tilde{D}_{n+2}$	105
4.4. Les types exceptionnels	106
4.5. Éléments cycliquement pleinement commutatifs logarithmiques	107
5. Les involutions cycliquement pleinement commutatives	108
5.1. Finitude et caractérisation	109
5.2. Énumération dans les types classiques	109
Chapitre 6. Automates et éléments cycliquement pleinement commutatifs	113
1. Théorie des automates finis	113
1.1. Langages et expressions régulières	113
1.2. Automates finis	115
2. Éléments cycliquement pleinement commutatifs et automates finis	118
2.1. Rationalité de la série génératrice des décompositions réduites	118
2.2. Rationalité de $W^{CPC}$	123
Chapitre 7. Perspectives	125
Formules de type Nekrasov–Okounkov	125
Éléments cycliquement pleinement commutatifs	126
Bibliographie	129

## CHAPITRE 1

### Introduction

*Alors monsieur Pencroft ? Cet appareil  
photo ?*

---

L'aventurier cow-boy du Cutty Stark, Don  
Rosa (1998)<sup>1</sup>

### Avant-propos

Le domaine de cette thèse est essentiellement la combinatoire énumérative, que l'on peut définir comme étant l'étude des ensembles discrets dont tous les éléments ont une taille finie.

Le but premier de la combinatoire énumérative est le dénombrement. Si on considère un ensemble  $E$  fini ou discret pour lequel on dispose d'une fonction de taille  $h : E \rightarrow \mathbb{N}$  telle que les sections  $E_n := \{x \in E, h(x) = n\}$  soient finies pour tout entier  $n$ , on s'intéresse alors au nombre d'éléments de  $E$  qui sont de taille  $n$ , c'est-à-dire au cardinal de l'ensemble  $E_n$ . Une des possibilités est que l'on soit capable de donner une formule close en fonction de  $n$  pour ce nombre. C'est la situation la plus favorable, mais on ne la rencontre pas toujours. Des exemples seront donnés par la suite de problèmes mathématiques où on ne connaît pas de telles formules closes. On peut cependant essayer alors d'obtenir le plus de renseignements possibles sur l'ensemble  $E_n$ , notamment en étudiant sa série génératrice. Cela permet non seulement d'étudier le cardinal de l'ensemble  $E_n$ , mais aussi de donner des informations sur certaines statistiques de cet ensemble.

Les problèmes de combinatoire énumérative apparaissent très précocement dans l'histoire des mathématiques, y compris dans l'Antiquité. En Europe, Fibonacci, au XIII<sup>e</sup>, peut être considéré comme un des précurseurs du domaine. Par la suite à partir du milieu du XVI<sup>e</sup>, Pascal, Newton et Euler vont considérablement développer et jeter les bases du domaine, notamment pour ce dernier en introduisant et généralisant l'usage des séries génératrices. Enfin, au XX<sup>e</sup>, la combinatoire a vécu un renouveau et un intense essor, en partie sous l'influence de l'émergence de l'informatique. En effet, la combinatoire est utile pour l'algorithmique, étant donné que cette dernière ne travaille qu'avec des structures de données finies. Étudier ces structures d'un point de vue combinatoire permet de mieux les connaître et de disposer ainsi d'algorithmes plus efficaces (on peut ici penser par exemple aux algorithmes sur les graphes ou sur les fonctions hypergéométriques). D'autre part, l'informatique joue aussi son rôle en combinatoire, notamment en permettant d'expérimenter certaines propriétés sur les objets de façon beaucoup plus poussée que si on effectuait les calculs à la main.

---

1. Contrairement, peut-être, aux apparences, toutes les épigraphes ont un lien plus ou moins direct avec le chapitre qu'elles chapeautent.

Les partitions d'entiers (ou partages) sont l'un des principaux thèmes de la combinatoire énumérative et de cette thèse, et furent introduites initialement par Euler en 1748 dans [19], le conduisant à démontrer plusieurs identités sur ces partitions, dont notamment le très célèbre théorème des nombres pentagonaux. Par la suite, Sylvester dans [23] a généralisé l'usage de bijections pour montrer de telles identités. Une des applications les plus notables de la théorie des partitions concerne la théorie des représentations du groupe symétrique : il est possible de définir les fonctions de Schur, et donc les caractères des représentations irréductibles du groupe symétrique, à l'aide des tableaux standards de Young, qui sont des remplissages par des entiers des diagrammes de Ferrers des partitions d'entiers. Cela a contribué à l'"âge d'or"<sup>2</sup> de la théorie des partitions d'entiers s'ouvrant à partir de 1965, conduisant à de nombreuses identités nouvelles, et à de jolies bijections. On peut par exemple citer la bijection algorithmique de Robinson–Schensted–Knuth [68], qui mène à la célèbre formule des équerres. Rappelons enfin que le problème de l'énumération des partitions d'entiers reste à l'heure actuelle ouvert : on connaît très bien leur série génératrice depuis Euler, ainsi que le comportement asymptotique du nombre  $p_n$  de partitions de taille  $n$  qui a été donné par Hardy et Ramanujan en 1918 [33]. On sait aussi depuis 1937 grâce à Rademacher [66] exprimer l'entier  $p_n$  sous forme de série infinie convergente, mais aucune expression de  $p_n$  simple, c'est-à-dire sous forme de formule close, n'est connue à l'heure actuelle, plus de 250 ans après l'introduction des partitions. Ceci est, de l'avis de l'auteur, l'un des problèmes les plus fascinants des mathématiques, étant donné la simplicité, presque enfantine, de l'énoncé du problème qui peut être expliqué en quelques lignes, comparée à la profondeur du problème, qui transparait dès qu'on l'aborde.

Un sous-ensemble des partitions, le sous-ensemble des  $t$ -cores, fut introduit en 1940 par Nakayama [50] en théorie des représentations du groupe symétrique, et conduisit à de nombreuses conjectures qui furent résolues par la suite. Ce thème a connu un certain renouveau à partir des années 1980. James et Kerber introduisirent en 1981 [37] le modèle équivalent des abaques, puis en 1990, Garvan, Kim et Stanton [24] ont montré une bijection désormais classique entre les  $t$ -cores et des vecteurs d'entiers relatifs. Celle-ci, associée à la définition d'une nouvelle statistique, le "crank", leur permit de montrer de manière bijective les congruences de Ramanujan. De nombreuses études des  $t$ -cores ont suivi. On citera notamment le travail de Ono [58] en 1994 sur la non-nullité du nombre de  $t$ -cores d'un entier  $n$ , ou les travaux de Anderson [1] en 2002 et de Olsson et Stanton [57] en 2007 sur les partitions d'entiers qui sont simultanément des  $t$  et des  $s$ -cores, celles-ci étant en nombre fini si  $s$  et  $t$  sont premiers entre eux. D'autres approches plus récentes s'intéressent aux cas où  $s$  et  $t$  sont liés, par exemple quand  $t = s + 1$  [3] ; ou encore s'intéressent aux plus grandes partitions qui sont à la fois des  $t$  et des  $s$ -cores [51].

Les  $t$ -cores sont aussi connus car ils interviennent dans les développements combinatoires des puissances de la fonction  $\eta$  de Dedekind. Ces développements sont importants notamment en théorie des nombres [55, 56, 71]. Par exemple, on peut citer sur le sujet la conjecture de Lehmer, sur la non-nullité des coefficients de la 24<sup>ième</sup> puissance de la fonction  $\eta$ . En 2006, dans leur étude de la théorie de Seiberg–Witten sur les jauges super-symétriques, Nekrasov et Okounkov [52] ont obtenu un

---

2. l'expression est d'Igor Pak

tel développement, qui porte désormais leurs noms<sup>3</sup>. Ce résultat a été redécouvert indépendamment par Han en 2009 [28], avec une approche bijective plus simple, qui fait intervenir des  $t$ -cores, ainsi que la bijection de Garvan, Kim et Stanton déjà mentionnée. L'approche de Han utilise aussi les identités de Macdonald sur les systèmes de racines affines [45] et les généralise ; ces identités étant elles-mêmes des extensions des formules déterminantales de Weyl pour les systèmes de racines finis et étant reliées à la théorie des représentations. Sur ce dernier sujet, le lien entre formules de Macdonald et théorie des représentations, on peut citer les travaux de Warnaar et Zudilin [84], de Bartlett et Warnaar [4, 5] et de Rains et Warnaar [67] visant à obtenir des formules combinatoires reflétant la positivité des caractères des algèbres affines de Kac–Moody.

Un autre pan de la combinatoire est la combinatoire algébrique. Le but ici est de fournir une structure aux ensembles d'objets combinatoires, à l'aide notamment d'outils provenant de l'algèbre. L'exploration de cette structure (qui peut être de nature très diverse : relation, ordre partiel, treillis...) permet alors d'avoir une compréhension plus profonde, voire plus intrinsèque de l'objet ainsi étudié. Cette étude peut ainsi permettre de simplifier le travail d'énumération, par exemple en explicitant mieux le comportement de certaines statistiques, mais aussi si la structure algébrique précédait l'étude combinatoire, d'apporter un sens nouveau à cette structure. On peut notamment penser ici aux caractères du groupe symétrique qui se sont révélés être les fonctions de Schur, pouvant être définies combinatoirement à partir des tableaux standards.

Certains objets essentiels étudiés par la combinatoire algébrique sont les groupes de Coxeter, qui sont des groupes générés par des réflexions sur un espace. On peut dire que l'étude de ces groupes remonte à l'Antiquité, avec la classification des polyèdres réguliers via leurs propriétés de symétries. La définition formelle des groupes de Coxeter remonte à 1934 et est due à Coxeter dans [14, 15]. Leur étude s'est généralisée par la suite, et touche à de nombreux domaines des mathématiques, notamment l'algèbre, la géométrie, la théorie des représentations et bien sûr la combinatoire algébrique. Elle est intimement liée à l'étude des systèmes de racines, puisqu'on peut associer à tout système de racines un groupe de Coxeter. En particulier, on sait classer les groupes de Coxeter finis, ainsi que les groupes de Coxeter dits affines, qui sont issus d'un système de racines affine, grâce notamment à l'utilisation des diagrammes de Coxeter.

Un sous-ensemble particulier d'éléments des groupes de Coxeter est constitué par les éléments pleinement commutatifs. Ils furent initialement introduits par Fan [22, 20], Graham [25] et Stembridge [77, 78, 79] dans les années 1990. Ils apparaissent naturellement dans le cadre des algèbres de Temperley–Lieb, car ils indexent une base linéaire naturelle de ces algèbres. Leur énumération est donc une question importante. Une réponse partielle a été donnée par Stembridge qui classa les groupes de Coxeter qui contiennent un nombre fini d'éléments pleinement commutatifs, et énuméra ces éléments dans ces groupes. Plus récemment, Biagioli, Jouhet et Nadeau [7] ont raffiné cette énumération en utilisant les empilements et en y adjoignant une statistique, la longueur de Coxeter, ce qui leur permet en outre

---

3. bien que ce développement était déjà connu implicitement par Westbury [85], et découlait des travaux de King [39], comme nous le verrons par la suite

d'effectuer cette énumération dans tous les groupes de Coxeter affines, y compris lorsque le cardinal des éléments pleinement commutatifs est infini. Les éléments pleinement commutatifs involutifs ont été aussi étudiés, car pour certains groupes, Fan a démontré que leur cardinal est la somme des dimensions des représentations irréductibles d'un quotient naturel de l'algèbre d'Iwahori–Hecke associée au groupe.

En 2012, Boothby, Burkert, Eichwald, Ernst, Green et Macauley [9] ont introduit un sous-ensemble des éléments pleinement commutatifs, les éléments cycliquement pleinement commutatifs, en tant que généralisation naturelle des éléments de Coxeter, dans le sens où, tout comme les éléments de Coxeter, ils peuvent être associés à des graphes orientés acycliques. La motivation essentielle de ces éléments est l'étude d'une version cyclique du théorème de Matsumoto, et un des premiers pas pour cette étude est de vérifier quels éléments cycliquement pleinement commutatifs ont la propriété d'être logarithmiques. En particulier, dans ce but, Boothby *et al.* ont classifié les groupes de Coxeter contenant un nombre fini d'éléments cycliquement pleinement commutatifs, et ont effectué l'énumération dans ces groupes. Marquis [46] a ensuite étudié plus généralement le caractère logarithmique des éléments d'un groupe de Coxeter.

## Contenu de la thèse

### Chapitre II.

Ce chapitre introduit les notions de bases de la combinatoire dont on aura besoin dans cette thèse, ainsi que certaines notations. Une première section se concentre sur la combinatoire énumérative, et présente les notions de partitions, de séries génératrices et de chemins. La seconde section se consacre à la combinatoire algébrique, via l'étude des groupes de Coxeter, des systèmes de racines et des ensembles partiellement ordonnés.

### Chapitre III.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des généralisations des formules de Macdonald dans des types différents du type affine  $\tilde{A}$ , qui est lui couvert par la formule de Nekrasov–Okounkov. Nous donnons ici deux généralisations des formules de Macdonald, l'une en type  $\tilde{C}$ , l'autre en type  $\tilde{C}^\sim$ , produisant ainsi deux développements combinatoires de puissances de la fonction  $\eta$  de Dedekind en termes de longueurs d'équerres de partitions d'entiers, et répondant ainsi à une question posée par Han dans [28]. L'approche utilisée ici est bijective, en introduisant deux nouvelles bijections entre des vecteurs d'entiers relatifs et certaines partitions, et s'appuie notamment sur la bijection de Garvan, Kim et Stanton. La preuve de ces généralisations fait intervenir des partitions ou bien auto-conjuguées, ou bien à parts distinctes doublées ; qui sont de plus des  $t$ -cores, où  $t$  est un certain entier ; ce qui nous amène à faire une étude précise des propriétés de ces partitions. Notamment, nous introduisons deux nouvelles statistiques sur celles-ci.

Nous étudions par la suite les conséquences de ces identités, dont une nouvelle formule des équerres symplectiques, ou un lien surprenant entre des identités de Macdonald en types  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{B}$ , et  $\tilde{BC}$  d'une part, et en types  $\tilde{C}^\sim$ ,  $\tilde{B}$ , et  $\tilde{BC}$  d'autre part.

Une partie du travail de ce chapitre, sur le type  $\widetilde{C}$ , a fait l'objet d'une publication [63] pour la conférence FPSAC, et d'un article soumis [64]. L'autre partie, sur le type  $\widetilde{C}^*$ , sera l'objet d'un autre article en cours de rédaction [62].

#### Chapitre IV.

Dans ce chapitre, nous étendons les résultats du chapitre précédent, en généralisant avec deux paramètres supplémentaires les formules obtenues. Pour ce faire, nous avons besoin de la décomposition de Littlewood, qui est une bijection entre des partitions et des vecteurs de partitions d'entiers. Nous étudions ici les propriétés de la décomposition de Littlewood des partitions à parts distinctes doublées et auto-conjuguées, et notamment nous décrivons l'action de cette décomposition sur les deux statistiques que nous avons introduites au chapitre précédent. Cela conduit à quatre généralisations différentes des formules de type Nekrasov–Okounkov vues au chapitre 3 avec deux paramètres supplémentaires, un qui est complexe et l'autre qui est entier. Il y a quatre généralisations car on doit distinguer suivant la parité de ce dernier.

De nombreuses conséquences sont tirées de ces généralisations, notamment une formule des équerres symplectiques généralisée pour les partitions à parts distinctes doublées, et une autre pour les partitions auto-conjuguées, ainsi que plusieurs fonctions génératrices avec poids pour ces partitions.

Une partie de ce travail fait l'objet de l'article soumis [64], et le reste sera l'objet de l'article en cours de rédaction [62].

#### Chapitre V.

Ce chapitre est complètement indépendant des deux précédents et entame l'étude des éléments cycliquement pleinement commutatifs, notamment dans les groupes de Coxeter finis et affines. Nous commençons par développer une construction, la clôture cylindrique, donnant un cadre théorique qui est aux éléments cycliquement pleinement commutatifs ce que les empilements sont aux éléments pleinement commutatifs. Nous donnons ainsi une caractérisation des éléments cycliquement pleinement commutatifs en terme de clôtures cylindriques pour n'importe quel système de Coxeter. Cette caractérisation nous permet de déterminer en termes d'expressions réduites les éléments cycliquement pleinement commutatifs dans tous les groupes de Coxeter finis ou affines, et d'en déduire dans tous ces groupes l'énumération de ces éléments, raffinée par la longueur. Cette nouvelle caractérisation nous permet aussi d'étudier les éléments pleinement commutatifs qui sont logarithmiques, retrouvant ainsi un résultat de Marquis [46]. Nous étudions les éléments cycliquement pleinement commutatifs qui sont aussi involutifs ; un des résultats essentiels est qu'il n'y en a qu'un nombre fini dans tout groupe de Coxeter. De plus, nous les énumérons pour tous les groupes de Coxeter affines et finis.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis [60].

#### Chapitre VI.

Ce chapitre poursuit l'étude des éléments cycliquement pleinement commutatifs, mais d'un point de vue très différent. Le résultat principal de ce chapitre énonce que la série génératrice des éléments cycliquement pleinement commutatifs selon leurs longueurs est rationnelle dans tous les groupes de Coxeter. Pour montrer ce résultat, nous utilisons la théorie des automates finis, très liée à l'informatique.



Nous en rappelons les bases dans ce chapitre, puis pour chaque groupe de Coxeter, nous construisons un automate fini qui reconnaît le langage des décompositions réduites des éléments cycliquement pleinement commutatifs. Ceci permet ensuite d'en déduire les conséquences recherchées sur les séries génératrices.

Ce chapitre est l'objet d'un article en cours de rédaction [61].

### **Chapitre VII.**

Ce chapitre sert de conclusion à cette thèse et fait le tour des perspectives possibles.

## CHAPITRE 2

### Définitions et notations

*Je commence une nouvelle collection.  
Une collection de piliers !*

---

Le trésor de Crésus, Don Rosa (1995)

Ce chapitre a pour but de présenter les pré-requis nécessaires à la lecture de cette thèse. En conséquence, aucun résultat n'est nouveau dans ce chapitre. On présente notamment ici des notions de théorie des partitions, de séries génératrices, avec une excursion vers le domaine des chemins. On mentionne aussi les groupes de Coxeter, les systèmes de racines et les identités de Macdonald. Enfin, une rapide présentation des ensembles partiellement ordonnés est aussi effectuée.

#### 1. Combinatoire énumérative

Nous effectuons dans cette section une synthèse des notions de combinatoire énumérative qui seront abordées dans cette thèse. L'essentiel se trouve dans [74, 76]. Plus de précisions sont données sur les pages auxquelles se référer par la suite. Nous commençons par une remarque importante de vocabulaire : dans toute la suite de cette thèse, un *entier* (sans autre précision) signifie un entier naturel. On précise toujours un *entier relatif* lorsqu'on parle d'un élément de  $\mathbb{Z}$ .

**1.1. Partitions d'entiers.** On présente dans ce paragraphe les pré-requis nécessaires en théorie des partitions [76, Sections 1.7 et 1.8].

**DÉFINITION 2.1.** Une *partition d'entier* (ou un *partage*)  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$  de l'entier  $n \geq 0$  est une suite finie décroissante (au sens large) d'entiers strictement positifs dont la somme est  $n$ . Les entiers  $\lambda_i$  sont les *parts* de  $\lambda$ ,  $\ell := \ell(\lambda)$  est sa *longueur*, et  $n$  est son *poids*, qui est aussi noté  $|\lambda|$ .

Toute partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$  peut être représentée par son *diagramme de Ferrers* : c'est un diagramme justifié à gauche composé de  $n$  cases, avec  $\lambda_i$  cases sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne. Les diagrammes de Ferrers sont représentés ici en convention française. On indexe les cases suivant les coordonnées cartésiennes canoniques, étant entendu que la case en bas à gauche du diagramme est la case  $(1, 1)$ . Un exemple est donné à gauche dans la Figure 1.1 ci-dessous.

Pour chaque case  $v = (i, j)$  dans le diagramme de Ferrers d'une partition  $\lambda$  (avec  $i \in \{1, \dots, \ell(\lambda)\}$  et  $j \in \{1, \dots, \lambda_i\}$ ), on définit l'*équerre de  $v$*  comme l'ensemble des cases  $u$  du diagramme de Ferrers de  $\lambda$  telles que  $u$  soit sur la même ligne et à droite de  $v$  ou telles que  $u$  soit dans la même colonne et au dessus de  $v$ . La *longueur d'équerre*  $h_v$  de la case  $v$  est le cardinal de l'équerre de  $v$  (voir la Figure 1.1, au centre). Le multi-ensemble des longueurs d'équerres de la partition  $\lambda$  est noté  $\mathcal{H}(\lambda)$ . Si  $t$  est un entier strictement positif, on note  $\mathcal{H}_t(\lambda)$  le multi-ensemble des longueurs d'équerres qui sont un multiple entier de  $t$ . L'équerre de  $v$  est *principale* si  $v = (i, i)$

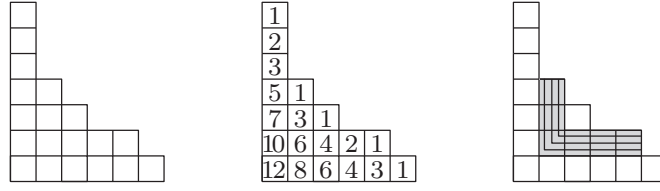


FIGURE 1.1. Le diagramme de Ferrers de la partition  $(6, 5, 3, 2, 1, 1, 1)$ , ses longueurs d'équerres, et une équerre principale.

(c'est-à-dire que  $v$  appartient à la diagonale principale de  $\lambda$ , voir un exemple dans la Figure 1.1, à droite). Le *carré de Durfee* de  $\lambda$  est le plus grand carré inclus dans son diagramme de Ferrers dont un des coins est constitué par la case  $(1, 1)$ . La longueur du côté du carré de Durfee est la *longueur de Durfee*, notée  $D(\lambda)$ ; c'est aussi le nombre d'équerres principales. On dénote par  $\delta_\lambda$  le nombre  $(-1)^{D(\lambda)}$ .

On peut définir une partition  $\lambda$  via sa *notation de Frobenius*. Si  $(i, i)$  est une case de la diagonale principale du diagramme de Ferrers de  $\lambda$ , on définit  $\alpha_i$  comme étant le nombre de cases situées dans la  $i^{\text{ème}}$  ligne du diagramme de Ferrers de  $\lambda$  et strictement à droite de la case  $(i, i)$ . On définit  $\beta_i$  comme étant le nombre de cases situées dans la  $i^{\text{ème}}$  colonne du diagramme de Ferrers de  $\lambda$  et strictement au-dessus de la case  $(i, i)$ . On associe alors à  $\lambda$  la matrice  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_{D(\lambda)} \\ \beta_1 & \cdots & \beta_{D(\lambda)} \end{pmatrix}$ , appelée *notation de Frobenius*. On peut alors vérifier que la notation de Frobenius d'une partition caractérise cette partition.

DÉFINITION 2.2. Si  $\lambda$  est une partition, sa *conjuguée*  $\lambda^*$  est la partition dont le diagramme de Ferrers est le symétrique du diagramme de Ferrers de  $\lambda$  par rapport à la diagonale principale. Un exemple est donné dans la Figure 1.2 ci-dessous.

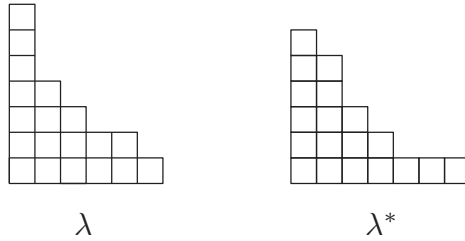


FIGURE 1.2. Les diagrammes de Ferrers de la partition  $\lambda = (6, 5, 3, 2, 1, 1, 1)$ , et de sa conjuguée  $\lambda^* = (7, 4, 3, 2, 2, 1)$ .

Il est aisé de vérifier que si une partition  $\lambda$  admet  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_{D(\lambda)} \\ \beta_1 & \cdots & \beta_{D(\lambda)} \end{pmatrix}$  comme notation de Frobenius, alors celle de sa partition conjuguée  $\lambda^*$  est  $\begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_{D(\lambda)} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{D(\lambda)} \end{pmatrix}$ .

Dans ce qui suit,  $t$  est un entier strictement positif fixé.

DÉFINITION 2.3. Soit  $\lambda$  une partition. On dit que  $\lambda$  est un  $t$ -core si et seulement si aucune longueur d'équerre de  $\lambda$  n'est un multiple entier de  $t$  (en d'autres termes,  $\mathcal{H}_t(\lambda) = \emptyset$ ).

Rappelons [74, p. 468] que, de façon équivalente,  $\lambda$  est un  $t$ -core si et seulement si aucune longueur d'équerre de  $\lambda$  n'est égale à  $t$ . Nous dénotons par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des partitions d'entiers et par  $\mathcal{P}_{(t)}$  le sous-ensemble des  $t$ -cores.

Rappelons que la définition précise d'un *ruban* de  $\lambda$  peut être trouvée dans [74, p. 345]. Nous nous contentons de dire qu'un ruban est un ensemble connexe de cases toutes situées sur la bordure extérieure du diagramme de Ferrers de  $\lambda$ , tel que si on supprime du diagramme de Ferrers cet ensemble de cases, le résultat est toujours le diagramme de Ferrers d'une partition. La *longueur* d'un ruban est son nombre de cases. Cette notion de ruban nous permet d'associer un  $t$ -core à toute partition de la façon suivante.

**DÉFINITION 2.4.** Soit  $\lambda$  une partition. Le  $t$ -core de  $\lambda$  est la partition  $T(\lambda)$  obtenue à partir de  $\lambda$  en supprimant dans le diagramme de Ferrers de  $\lambda$  tous les rubans de longueur  $t$ , et en répétant cette opération jusqu'à ce qu'on ne puisse plus enlever de tels rubans.

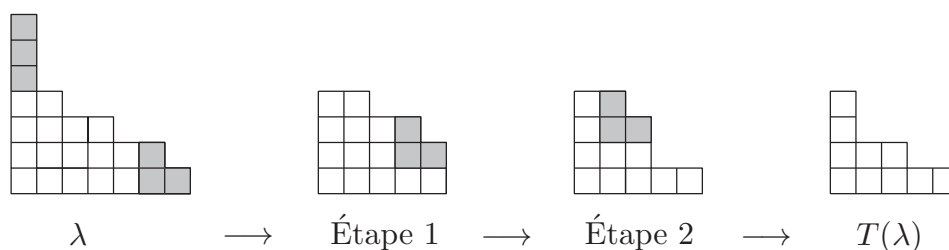


FIGURE 1.3. La construction du 3-core de la partition  $\lambda = (7, 6, 4, 2, 1, 1, 1)$ . En gris, les rubans qu'on supprime.

Remarquons que la partition  $T(\lambda)$  est bien définie car la partition résultante ne dépend pas de l'ordre de suppression des rubans (voir [74, p. 468] pour une preuve). En particulier, comme les cases de longueur d'équerre  $t$  correspondent bijectivement aux rubans de longueur  $t$ , le  $t$ -core  $T(\lambda)$  d'une partition  $\lambda$  est lui-même un  $t$ -core.

**1.2. Séries génératrices.** On présente dans ce paragraphe les notions basiques sur les séries génératrices.

Si  $E$  est un ensemble discret muni d'une taille  $h : E \rightarrow \mathbb{N}$  telle que les sections  $E_n := \{x \in E, h(x) = n\}$  soient finies pour tout entier  $n$  (par exemple les partitions munies de leur fonction poids), on s'intéresse au cardinal  $a_n$  des sections  $E_n$  (dans le cas des partitions,  $a_n$  est le nombre de partitions de l'entier  $n$ ). Dans certains cas, il n'est pas possible de calculer explicitement  $a_n$ , mais on peut cependant souvent calculer la *série génératrice*  $E(x)$  associée à  $E$ , qui est définie comme étant la série formelle :

$$(1) \quad E(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Rappelons que les séries génératrices sont des séries formelles, on ne se soucie en général pas de pouvoir évaluer  $E(x)$  en un point particulier  $x_0$ , c'est pourquoi on ne s'intéressera pas a priori aux questions de convergence ou de divergence de ces séries. Rappelons aussi que si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles discrets, la somme de leurs séries génératrices correspond à la réunion disjointe des ensembles  $E$  et  $F$  et que le produit des séries génératrices correspond à la concaténation des éléments de

$E$  et de  $F$ . Enfin, notons que les séries génératrices sont un outil fondamental car on peut souvent transformer une décomposition récursive des objets qu'on considère en une équation fonctionnelle sur la série génératrice associée.

Si  $E(x)$  est une série formelle et  $n$  un entier, on note  $[x^n]E(x)$  le coefficient de  $x^n$  dans le développement de Taylor de  $E(x)$ .

Pour calculer une série génératrice, de multiples méthodes ont été développées, du calcul direct à partir de l'expression des coefficients  $a_n$  à l'utilisation de relations de récurrence sur les  $a_n$  en passant par la méthode symbolique de Flajolet–Sedgewick (cette liste n'étant bien entendu pas exhaustive...). Il n'entre cependant pas dans notre propos de présenter toutes ces méthodes et le lecteur pourra consulter [76] pour une présentation plus complète.

On peut calculer facilement la série génératrice des partitions d'entiers.

**THÉORÈME 2.5.** *La série génératrice des partitions d'entiers est donnée par l'expression suivante :*

$$(2) \quad \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{|\lambda|} = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i}.$$

**DÉMONSTRATION.** On donne ici une preuve courte. Une partition est la concaténation de  $k_1$  parts de poids 1, de  $k_2$  parts de poids 2,  $k_3$  parts de poids 3, et ainsi de suite. La série génératrice des partitions dont toutes les parts sont de poids  $i$  (avec  $i$  un entier) est  $1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \dots = \frac{1}{1 - x^i}$  par calcul direct.  $\square$

Nous en profitons pour rappeler que la *fonction  $\eta$  de Dedekind*, qui est une forme modulaire de poids  $1/2$  (voir [43]), est définie pour tout nombre complexe de module strictement inférieur à 1 comme

$$(3) \quad \eta(x) = x^{1/24} \prod_{k \geq 1} (1 - x^k).$$

On constate donc que cette fonction  $\eta$  est, au facteur de modularité  $x^{1/24}$  près, l'inverse de la fonction génératrice des partitions.

Pour illustrer l'efficacité des séries génératrices, nous donnons un exemple d'ensembles ayant le même cardinal tels que la preuve de ce fait par série génératrice est très simple.

**THÉORÈME 2.6.** *Soit  $n$  un entier positif. L'ensemble des partitions de  $n$  en parts distinctes est en bijection avec l'ensemble des partitions de  $n$  en parts impaires.*

**DÉMONSTRATION.** La série génératrice des partitions en parts distinctes est :

$$(4) \quad \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda \text{ est à parts distinctes}}} x^{|\lambda|} = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i).$$

La série génératrice des partitions en parts impaires est :

$$(5) \quad \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \lambda \text{ est à parts impaires}}} x^{|\lambda|} = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^{2i-1}} = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^{2i}}{1 - x^i} = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i).$$

Les deux ensembles ayant les mêmes séries génératrices, ils sont en bijection.  $\square$

Remarquons que dans le cas précédent, il n'est pas si difficile de trouver une bijection explicite entre les deux ensembles, ce qui en outre donne en général plus de renseignements qu'une preuve par égalité de séries génératrices. Néanmoins, il n'est pas toujours aisé de trouver une telle bijection (on peut par exemple penser ici aux identités de Rogers–Ramanujan), et la preuve par égalité de séries est parfois la seule dont on dispose.

**1.3. Une excursion dans le monde des chemins.** Nous présentons ici très rapidement la notion de chemin sur un réseau. Si  $d$  est un entier, et  $S$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^d$ , un *chemin* sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$  avec pas dans  $S$  est une suite finie  $v_0, v_1, \dots, v_k$  de points dans  $\mathbb{Z}^d$  telle que les différences consécutives  $v_{i+1} - v_i$  pour  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  appartiennent à  $S$  (voir [76, p.21]). On dit que le chemin *commence* à  $v_0$  et *se termine* à  $v_k$ . Nous nous intéressons dans cette thèse au cas où  $d = 2$ . Deux types de chemins sont alors très connus : les chemins de Dyck et les chemins de Motzkin.

**DÉFINITION 2.7.** Un *chemin de Dyck de longueur  $n$*  est un chemin sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ , avec  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$  comme ensemble de pas, commençant en  $(0, 0)$  et se terminant en  $(2n, 0)$ .

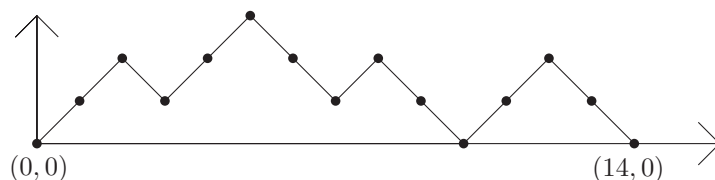


FIGURE 1.4. Un exemple de chemin de Dyck de longueur 7.

Beaucoup d'objets combinatoires sont en bijection avec les chemins de Dyck (on se référera bien entendu à [74, Exercice 6.19]). Rappelons seulement que le nombre de chemins de Dyck de longueur  $n$  est le  $n^{\text{ième}}$  *nombre de Catalan*<sup>1</sup>, défini par  $c_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

**DÉFINITION 2.8.** Un *chemin de Motzkin de longueur  $n$*  est un chemin sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ , avec  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, -1)$  comme ensemble de pas, commençant en  $(0, 0)$  et se terminant en  $(n, 0)$ .

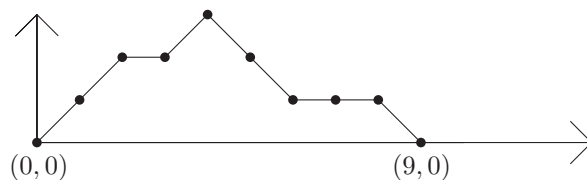


FIGURE 1.5. Un exemple de chemin de Motzkin de longueur 9.

A l'instar des chemins de Dyck, les chemins de Motzkin sont en bijection avec nombre d'objets combinatoires (voir [74, Exercice 6.38]). Cependant, contrairement à ceux-ci, on ne connaît pas d'expression simple (c'est-à-dire sans sommation sur

1. il était nécessaire qu'ils apparaissent quelque part, en voici l'occasion

$n$ ) donnant le nombre de chemins de Motzkin de longueur  $n$ . On peut cependant calculer la série génératrice de ces chemins, qui est :

$$(6) \quad \sum_{n \geq 0} \sum_{\gamma \text{ chemin de Motzkin de longueur } n} x^n = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2}.$$

## 2. Combinatoire algébrique

Nous précisons dans cette section quelques notions de combinatoire algébrique qui seront utiles par la suite. Le lecteur plus intéressé pourra se référer à [8, 35].

**2.1. Groupes de Coxeter.** Les groupes de Coxeter sont un objet d'étude central de la combinatoire algébrique, et furent introduits initialement sous leur forme actuelle par Coxeter en 1934 dans [14] (bien que certains groupes de Coxeter fussent déjà connus à cette époque).

Soit  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  un ensemble fini. Dans la suite les éléments de  $S$  sont appelés des *générateurs*. Une matrice  $M = (m_{st})_{s,t \in S}$  de taille  $n \times n$  et à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est de *Coxeter* si elle vérifie les relations suivantes :

- pour tous générateurs  $s$  et  $t$  dans  $S$ ,  $m_{st} = m_{ts}$  ;
- $m_{st} = 1$  si et seulement si  $s = t$ .

**DÉFINITION 2.9.** Un groupe  $W$  est de *Coxeter* si il est généré par un ensemble fini de générateurs  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  et si il existe une matrice de Coxeter  $M = (m_{st})_{s,t \in S}$  telle que le groupe  $W$  admette la présentation composée des relations  $(st)^{m_{st}} = e$  pour tous générateurs non nécessairement distincts  $s$  et  $t$  dans  $S$  (où on a noté  $e$  l'élément neutre du groupe  $W$ ). Si une telle présentation existe, le couple  $(W, S)$  est appelé un *système de Coxeter*.

Remarquons que si  $(W, S)$  est un système de Coxeter, les générateurs  $s \in S$  sont des involutions. De plus, on peut aussi écrire les relations sous la forme  $sts \dots = tst \dots$ , chaque côté de l'égalité ayant  $m_{st}$  comme longueur ; elles sont usuellement appelées *relations de tresse* quand  $m_{st} \geq 3$ . Quand  $m_{st} = 2$ , on a alors une *relation de commutation* (aussi appelée une *courte relation de tresse*). Quand  $m_{st} = \infty$ , cela signifie qu'il n'y a pas de relation entre les générateurs  $s$  et  $t$ .

Il existe une façon simple et commode de représenter un système de Coxeter à l'aide d'un graphe. On définit le *diagramme de Coxeter*  $\Gamma$  associé à un système de Coxeter  $(W, S)$  comme étant le graphe ayant  $S$  pour ensemble de sommets, et pour chaque couple de générateurs distincts  $(s, t)$  avec  $m_{st} \geq 3$ , une arête entre les sommets  $s$  et  $t$  avec une étiquette  $m_{st}$ . Si  $m_{st} = 3$ , on n'indiquera alors pas l'étiquette, car ce cas est le plus courant. En particulier, ce diagramme facilite la reconnaissance de deux générateurs qui commutent : ce sont simplement les générateurs qui n'ont pas d'arête entre eux. L'utilisation de ces diagrammes a permis entre autres à Coxeter de classer à l'aide de conditions sur ces diagrammes les groupes de Coxeter finis.

Nous donnons maintenant un premier exemple de groupe de Coxeter.

**EXEMPLE 2.10.** Soit  $n$  un entier. Le groupe symétrique  $S_n$  est un groupe de Coxeter. Ses générateurs sont les transpositions de la forme  $(i, i + 1)$  pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ . On note  $s_i$  la transposition  $(i, i + 1)$ . Les relations sont de la forme  $s_i^2 = e$  pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ ,  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  pour  $i \in \{1, \dots, n - 2\}$  et  $s_i s_j = s_j s_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  et  $j \neq i + 1, i - 1$ . Traditionnellement, pour des raisons liées aux algèbres de Lie, lorsqu'on considère le groupe symétrique comme

un groupe de Coxeter généré par les générateurs  $s_1, \dots, s_{n-1}$ , on note  $(A_{n-1}, S)$  le système de Coxeter associé. Son diagramme de Coxeter est donné ci-dessous dans la Figure 2.1.

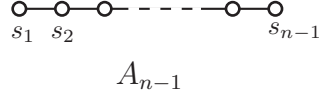


FIGURE 2.1. Le diagramme de Coxeter du groupe symétrique.

Étant donné un système de Coxeter  $(W, S)$ , chaque élément  $w \in W$  peut s'écrire comme un produit de générateurs de  $S$ . Une telle écriture, en général non unique, est appelée un *mot* ou une *expression* de l'élément  $w$ . Réciproquement à tout mot ou expression  $\mathbf{w}$  composé de générateurs est associé un élément du groupe de Coxeter, on parle alors d'*élément correspondant* à  $\mathbf{w}$ . Dans un souci de clarté, on écrira les éléments de  $W$  sous la forme  $w$  (en italique), et les expressions sous la forme  $\mathbf{w}$  (en gras).

Pour  $w \in W$ , la *longueur de Coxeter*  $\ell(w)$  de  $w$  est la longueur minimale de toute expression (ou mot)  $\mathbf{w} = s_{a_1} \dots s_{a_n}$  avec  $s_{a_i} \in S$  telle que l'élément correspondant à  $\mathbf{w}$  est  $w$ . Une expression  $\mathbf{w}$  est dite *réduite* si elle fait partie des expressions de longueur minimale de l'élément associé  $w$ . On dit aussi *décomposition réduite* pour expression réduite. L'ensemble de toutes les expressions réduites de  $w$  est noté  $R(w)$ . Un résultat classique en théorie des groupes de Coxeter, connu sous le nom de théorème de Matsumoto (voir [8, Théorème 3.3.1]), est que toute expression dans  $R(w)$  peut être obtenue de n'importe quelle autre en n'utilisant que des relations de tresse.

EXEMPLE 2.11. Les éléments du groupe symétrique  $A_2$  défini dans l'Exemple 2.10 admettent les décompositions réduites suivantes  $\{e, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1, s_2s_1s_2\}$ . Remarquons qu'en vertu de la définition de ce groupe, les deux expressions réduites  $s_1s_2s_1$  et  $s_2s_1s_2$  correspondent au même élément, à savoir la transposition (13).

Nous n'avons présenté ici que les propriétés les plus basiques des groupes de Coxeter, qui en possèdent beaucoup (propriétés de l'échange et de la réduction, propriétés sur la longueur, propriétés de l'ordre faible et de l'ordre de Bruhat...). Pour une étude plus poussée de ces groupes, nous renvoyons le lecteur intéressé à [8, 35].

**2.2. Systèmes de racines et identités de Macdonald.** Il n'entre pas dans le cadre de cette thèse d'effectuer une présentation détaillée des systèmes de racines, ni même de donner plus qu'une idée de leur rôle en mathématiques. Nous nous bornons ici à rappeler quelques définitions ainsi que les concepts qui nous sont utiles dans la suite.

Dans tout ce paragraphe,  $V$  est un espace euclidien réel muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et  $\alpha$  est un vecteur de  $V$ . Rappelons que la *réflexion associée* à  $\alpha$  est un endomorphisme linéaire  $s_\alpha$  de  $V$  qui associe au vecteur  $\alpha$  son opposé  $-\alpha$  et qui fixe son hyperplan orthogonal. Nous donnons maintenant la définition des systèmes de racines.

DÉFINITION 2.12. Un *système de racines fini*  $\Phi$  est un ensemble fini de vecteurs non nuls de  $V$  (appelés les *racines*) vérifiant les conditions :



- (i)  $\phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$  pour toute racine  $\alpha \in \Phi$  ;
- (ii)  $s_\alpha \Phi = \Phi$  pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ .

Si de plus, pour tout couple de racines  $(\alpha, \beta) \in \Phi^2$ , on a  $\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \in \mathbb{Z}$ , le système de racine est *cristallographique*<sup>2</sup>.

Nous rappelons simplement que les systèmes de racines finis furent utilisés initialement par Cartan et Killing pour classifier les algèbres de Lie semi-simples. De plus, ces systèmes permettent aussi l'étude et la caractérisation des groupes finis générés par des réflexions, car ceux-ci sont caractérisés par les vecteurs qui sont les points fixes des réflexions. On constate donc ici un lien très fort entre les systèmes de racines finis et les groupes de Coxeter finis, nous n'en disons pas plus car on sortirait du cadre de cette thèse. Pour plus de renseignement sur ces systèmes de racines, nous renvoyons le lecteur à [8, 10, 35].

EXEMPLE 2.13. Soit  $V$  l'hyperplan vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini comme l'ensemble des vecteurs  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  vérifiant l'équation  $x_1 + \dots + x_{n+1} = 0$ . On considère le sous-ensemble  $\Phi$  de  $V$  comme l'ensemble des vecteurs de  $V$  à coordonnées entières et de norme  $\sqrt{2}$ . Ce sous-ensemble  $\Phi$  est un système de racines fini cristallographique. Notons que son groupe de Weyl est le groupe symétrique (voir Définition 2.10).

Il est aussi possible de définir un analogue des systèmes de racines finis, les *systèmes de racines affines* (qui jouent le même rôle vis-à-vis des systèmes de Coxeter affines que le rôle joué par les système de racines finis vis-à-vis des systèmes de Coxeter finis). Nous n'en donnons cependant pas la définition ici, et nous disons simplement que ce sont des sous-ensembles des fonctions affines d'un espace euclidien réel vérifiant des conditions analogues à celles définissant les systèmes de racines finis.

Il est à noter que les systèmes de racines affines réduits et irréductibles, tout comme les systèmes de racines finis, peuvent être classifiés. Il en existe exactement sept familles infinies, les types  $\widetilde{A}_\ell, \widetilde{B}_\ell, \widetilde{C}_\ell, \widetilde{D}_\ell, \widetilde{E}_\ell, \widetilde{F}_\ell, \widetilde{G}_\ell$ ; ainsi que sept types sporadiques (ou exceptionnels)  $\widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8, \widetilde{F}_4, \widetilde{G}_2, \widetilde{H}_4, \widetilde{H}_5$ . Pour la description de chacun de ces types, nous renvoyons le lecteur à [45, Appendice 1].

Macdonald a montré dans son article [45] qu'il est possible de généraliser aux systèmes de racines affines la formule déterminantale de Weyl pour les systèmes de racines finis  $R$ , qui peut elle-même être écrite comme suit :

$$(7) \quad \prod_{\alpha \in R^+} (\exp(\alpha/2) - \exp(-\alpha/2)) = \sum_{w \in W(R)} \varepsilon(w) \exp(w\rho),$$

où la somme porte sur tous les éléments du groupe de Weyl  $W(R)$ ,  $\varepsilon$  est la signature et  $\rho$  est un vecteur explicite qui dépend de  $W(R)$ . Pour le membre de gauche, le produit porte sur l'ensemble des racines positives  $R^+$ , et l'exponentielle est une exponentielle formelle.

Nous ne donnons pas ici la formule générale prouvée par Macdonald [45, Théorème 8.1], car son expression comporte des notions (le groupe de Weyl, les systèmes de racines gradients, la fonction  $s(w)$  et le réel  $u_\alpha$ ) qui nécessiteraient plusieurs pages de pré-requis pour être définies. Cependant, cette formule nous est utile car Macdonald l'a spécialisée pour de nombreux systèmes de racines affines et diverses

2. Ces systèmes sont nommés ainsi d'après Bravais, qui s'en est servi pour étudier les différents types de cristaux apparaissant en chimie.

exponentielles, ce qui simplifie considérablement son écriture. En effet, dans tous les cas, lorsque l'exponentielle formelle est spécialisée en la fonction constante égale à 1, le côté gauche peut être réécrit comme une puissance entière de la fonction  $\eta$  de Dedekind définie au paragraphe 1.1 (et cette puissance est la dimension d'un groupe de Lie compact acceptant  $R$  en tant que système de racines). Nous voyons donc ici apparaître un lien avec la combinatoire énumérative et la théorie des partitions d'entiers. Ce lien sera exploré plus en détail dans le chapitre suivant.

**2.3. Ensembles partiellement ordonnés.** Nous terminons ce chapitre par une introduction aux ensembles partiellement ordonnés. Ici encore, la théorie concernant ces ensembles est très vaste, et nous nous contentons de préciser quelques définitions sans prétendre à l'exhaustivité.

**DÉFINITION 2.14.** Un *ensemble partiellement ordonné* (couramment abrégé *poset*, de l'anglais partially ordered set) est un couple  $(E, \leq)$  tel que  $E$  soit un ensemble muni d'une relation  $\leq$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (réflexivité) pour tout élément  $x \in E$ ,  $x \leq x$  ;
- (transitivité) pour tous les éléments  $x, y$  et  $z$  de  $E$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq z$  alors  $x \leq z$  ;
- (antisymétrie) pour tous les éléments  $x$  et  $y$  de  $E$ , si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , alors  $x = y$ .

**EXEMPLE 2.15.**

- (i) L'ensemble des réels muni de l'ordre classique  $\leq$  est un poset.
- (ii) L'ensemble des réels muni de la relation  $<$  n'est pas un poset.
- (iii) L'ensemble  $\{3, 5, 7, 8, 9, 21, 45\}$  muni de la relation "divise" est un poset.
- (iv) L'ensemble des décompositions réduites du groupe symétrique muni de l'ordre faible est un poset.

Si  $(E, \leq)$  est un poset et si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $E$ , on écrit  $x < y$  si  $x \leq y$  et  $x \neq y$ . On dit que  $y$  *couvre*  $x$  si on a  $x < y$  et qu'il n'existe pas d'élément  $z$  de  $E$  tel que  $x < z < y$ . Si  $y$  couvre  $x$ , on dit qu'il y a une *relation de couverture* entre  $x$  et  $y$ .

Lorsque  $E$  est fini (ou localement fini), la donnée des relations de couvertures et des éléments de  $E$  suffisent à définir de manière unique le poset  $(E, \leq)$  (les autres relations sont obtenues par réflexivité et transitivité). Cela permet de représenter un poset par un graphe, le *diagramme de Hasse*, défini comme suit : les sommets du graphe sont les éléments de  $E$ , et si  $x$  est relié à  $y$  et si  $x$  est en dessous de  $y$ , alors  $x \leq y$  (voir un exemple dans la Figure 2.2).

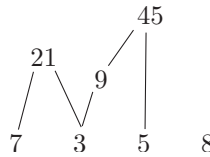


FIGURE 2.2. Le diagramme de Hasse du poset de l'Exemple 2.15 (iii).

Un élément  $x$  d'un poset  $(E, \leq)$  est *minimal* (respectivement *maximal*) s'il n'existe pas d'élément  $y$  de  $E$  tel que  $y < x$  (respectivement  $x < y$ ).

Dans l'Exemple 2.15 (iii), les éléments 3, 7 et 5 sont minimaux. Les éléments 21 et 45 sont maximaux. L'élément 8 est à la fois minimal et maximal. Enfin, 9 n'est ni minimal ni maximal.

Nous terminons ce paragraphe par une définition très utile dans la suite.

DÉFINITION 2.16. Soit  $(E, \leq)$  un poset. Une chaîne est une suite d'éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $E$  telle que

$$x_1 \leq \dots \leq x_n.$$

Dans l'Exemple 2.15 (iii), la suite  $3, 9, 45$  est une chaîne. La suite  $8, 45$  n'est pas une chaîne.

## CHAPITRE 3

### Formules de type Nekrasov-Okounkov

*Le dessin est de rigueur en sculpture  
combinatoire.*

---

Pensées sur la peinture, Denis Diderot  
(1772)

#### 1. Introduction

Nous commençons par rappeler (voir (3)) que la fonction  $\eta$  de Dedekind est une forme modulaire de poids  $1/2$  définie comme suit :

$$(8) \quad \eta(x) = x^{1/24} \prod_{k \geq 1} (1 - x^k),$$

où  $x$  est un nombre complexe de module strictement inférieur à 1 (nous supposons cette condition vérifiée dans tout le reste de ce chapitre). En plus de ses propriétés modulaires qui sont dues à la présence du facteur  $x^{1/24}$ , cette fonction joue un rôle fondamental en combinatoire, car elle est en particulier très fortement reliée à la fonction génératrice des partitions d'entiers (voir (2)). Étudier le développement de Taylor des puissances (entières ou non) de  $\eta$  est très naturel, étant donné que cela conduit à un certain nombre de questions intéressantes, à la fois en combinatoire et en théorie des nombres, comme par exemple la célèbre conjecture de Lehmer (on pourra, par exemple, consulter [70] sur ce sujet). En 2006, dans leur étude de la théorie de Seiberg–Witten sur les jauges super-symétriques en physique des particules [52], Nekrasov et Okounkov ont obtenu la formule suivante :

$$(9) \quad \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)^{z-1} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left(1 - \frac{z}{h^2}\right),$$

où  $z$  est un nombre complexe,  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des partitions, défini au paragraphe 2.1 du chapitre précédent, et  $\mathcal{H}(\lambda)$  est le multi-ensemble des longueurs d'équerres de la partition  $\lambda$ .

En 2008, ce développement a été redécouvert indépendamment et généralisé par Han [28], au moyen de deux outils principaux, l'un provenant d'un contexte plus algébrique, et l'autre provenant d'un contexte plus combinatoire. De cette généralisation, Han a déduit de nombreuses applications en combinatoire et en théorie des nombres, comme une formule des équerres pointées, une reformulation de la conjecture de Lehmer, ainsi qu'un raffinement d'un résultat dû à Kostant [44]. La formule (9) a ensuite été redémontrée et généralisée différemment par Iqbal *et al.* en 2013 [36] en utilisant les partitions planes, la formule de Cauchy pour les fonctions de Schur et la notion de sommet topologique.

En plus des nombreuses applications données par Han dans ses articles [26, 28, 27], ainsi que par Han et Ji dans [29], l'identité (9) a aussi été utilisée dans [13]

pour obtenir de nouvelles congruences à la Ramanujan et dans [38] pour prouver des analogues polynômiaux des congruences de Ramanujan. Elle a en outre servi dans [83] pour donner une expression exacte, par le moyen de méthodes de théorie analytique des nombres, du cardinal des partitions de  $n$  ayant un nombre pair de longueurs d'équerres multiples de  $t$  auquel on soustrait le cardinal des partitions de  $n$  ayant un nombre impair de longueurs d'équerres multiples de  $t$ .

La preuve due à Han de (9) utilise d'une part une version légèrement différente d'une bijection entre les  $t$ -cores et certains vecteurs d'entiers due à Garvan, Kim et Stanton dans leur preuve des congruences de Ramanujan [24]. Rappelons [37] que les  $t$ -cores ont été initialement introduits en 1940 par Nakayama en théorie des représentations pour étudier certains caractères du groupe symétrique (voir la Définition 2.10). D'autre part, Han utilise l'identité de Macdonald pour le système de racines  $A_n$ , pour  $n$  impair [45]. Plus précisément, la spécialisation utilisée dans [28] correspond au type  $\tilde{A}_t$ , avec  $t$  un entier impair positif, et s'écrit de la manière suivante :

$$(10) \quad \eta(x)^{t^2-1} = c_0 \sum_{\mathbf{v}} x^{\|\mathbf{v}\|^2/(2t)} \prod_{i < j} (v_i - v_j), \quad \text{avec } c_0 := \frac{(-1)^{(t-1)/2}}{1!2! \dots (t-1)!},$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne canonique, et où la somme porte sur les  $t$ -uplets  $\mathbf{v} := (v_0, \dots, v_{t-1}) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $v_i \equiv i \pmod{t}$  et  $v_0 + \dots + v_{t-1} = 0$ . Han utilise ensuite une variation de la bijection susmentionnée de [24] pour transformer le membre de droite en une somme sur les partitions ; et ainsi prouve (9) pour tous les entiers impairs positifs  $t$ . Par la suite, il utilise un argument de polynômialité pour montrer que (9) est vérifiée pour tout nombre complexe  $t$ . Un fait remarquable est que le facteur de modularité  $x^{(t^2-1)/24}$  dans  $\eta(x)^{t^2-1}$  disparaît naturellement dans la preuve lorsque la bijection est appliquée.

Cette approche soulève immédiatement une question, qui a été initialement posée par Han lui-même dans [26, Problème 6.4] : peut-on utiliser des spécialisations de la formule de Macdonald dans d'autres types pour découvrir (et prouver) de nouveaux développements combinatoires de puissances de la fonction  $\eta$  ? Cette question est à la base de ce chapitre, dans lequel on donne une réponse positive pour les types  $\tilde{C}$  et  $\tilde{C}^\sim$  ainsi que, comme on le verra par la suite, pour les types  $\tilde{B}$  et  $\widetilde{BC}$ . Dans le cas du type  $\tilde{C}_t$ ,  $t \geq 2$  étant un entier, la formule de Macdonald s'écrit :

$$(11) \quad \eta(x)^{2t^2+t} = c_1 \sum_{\mathbf{v}} x^{\|\mathbf{v}\|^2/(4t+4)} \prod_i v_i \prod_{i < j} (v_i^2 - v_j^2),$$

où  $c_1 := \frac{(-1)^{\lfloor t/2 \rfloor}}{1!3! \dots (2t+1)!}$ , et la somme porte sur les  $t$ -uplets  $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $v_i \equiv i \pmod{2t+2}$ . La première difficulté pour découvrir un analogue de (9) qui généraliserait (11) est de découvrir quel objet combinatoire pourrait jouer le rôle des partitions  $\lambda$ . L'un des deux résultats principaux de ce chapitre est le théorème suivant.

**THÉOREME 3.1.** *Pour tout nombre complexe  $z$ , avec les notations et les définitions de la section 2, on a le développement de Taylor suivant :*

$$(12) \quad \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)^{2z^2+z} = \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 - \frac{2z+2}{h \varepsilon_h} \right),$$

où la somme porte sur les partitions à parts distinctes doublées  $\lambda$  (voir Définition 3.4),  $\delta_\lambda$  est égal à 1 (respectivement  $-1$ ) si le carré de Durfee de  $\lambda$  est de taille paire (respectivement impaire), et  $\varepsilon_h$  vaut  $-1$  si  $h$  est la longueur d'équerre d'une case strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda$  et 1 sinon.

La stratégie globale pour prouver ce théorème est d'utiliser (11) et une bijection, obtenue grâce à des résultats provenant de [24], entre l'ensemble des vecteurs apparaissant dans (11) et les couples de partitions  $(\lambda, \mu)$ , où  $\lambda$  est un  $(t+1)$ -core auto-conjugué et  $\mu$  est un  $(t+1)$ -core à parts distinctes doublées. Quelques lemmes techniques à propos des ensembles  $2t+2$ -compacts et des longueurs d'équerres principales du couple  $(\lambda, \mu)$  nous permettent de démontrer le Théorème 3.17 ci-dessous (un argument de polynômialité est aussi nécessaire). Une bijection entre les couples  $(\lambda, \mu)$  et les partitions à parts distinctes doublées nous permet alors d'établir le Théorème 3.1.

De nombreuses applications peuvent être déduites directement du Théorème 3.1. Cependant, nous mettrons ici l'accent uniquement sur trois d'entre elles. La première est l'analogie symplectique suivant (correspondant au type fini  $B$ ) de la fameuse formule combinatoire des équerres (qui a de nombreuses conséquences en théorie des représentations du groupe symétrique, voir par exemple [74, Chapitre 7]), valable pour tout entier positif  $n$  :

$$(13) \quad \sum_{\substack{\lambda \in DD \\ |\lambda|=2n}} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{1}{h} = \frac{1}{2^n n!}.$$

La seconde, qui est plus algébrique et qui est formulée dans le Théorème 3.20 ci-dessous, est un lien surprenant entre la famille des formules de Macdonald en types  $\tilde{C}_t$  (pour tout entier  $t \geq 2$ ), celle des formules en types  $\tilde{B}_t$  (pour tout entier  $t \geq 3$ ), et celle des formules en types  $\widetilde{BC}_t$  (pour tout entier  $t \geq 1$ ).

Enfin, la troisième (voir le Théorème 3.23 ci-dessous) est une amélioration d'un théorème dû à Kostant [44], relié à des questions classiques de théorie des nombres concernant la non-nullité de certains des coefficients  $f_k(s)$ , où l'on a écrit :

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^s = \sum_{k \geq 0} f_k(s) x^k.$$

Ce chapitre s'organise comme suit. Dans la section 2, nous rappelons les définitions et les notations concernant les  $t$ -cores et les partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées. La section 3 présente des bijections entre les familles susmentionnées de partitions et certains vecteurs de  $\mathbb{Z}^t$ , ainsi que leurs propriétés que nous allons expliciter. Plus précisément, le paragraphe 3.1 introduit une nouvelle bijection entre les vecteurs d'entiers relatifs impliqués dans (11) et les couples de  $(t+1)$ -cores dont l'un est auto-conjugué et l'autre à parts distinctes doublées. Les paragraphes 3.2–3.3 sont dédiés à la preuve du Théorème 3.1, tandis que le paragraphe 3.4 présente la formule des équerres symplectiques (13), et une connexion entre la formule de Macdonald (11) et certaines identités de Macdonald en types  $\tilde{B}$  et  $\widetilde{BC}$ , dont on montre dans le Théorème 3.20 qu'elles sont toutes généralisées par le Théorème 3.1. Le raffinement mentionné ci-dessus d'un résultat du à Kostant est donné dans le paragraphe 3.5. Dans la section 4, nous montrons une généralisation



Par exemple, le 3-core  $\lambda = (7, 5, 3, 1, 1)$  de la Figure 2.1 satisfait  $\phi(\lambda) = (3, -2, -1)$ . On peut vérifier que  $7 + 5 + 3 + 1 + 1 = 17 = |\lambda| = \frac{3}{2}(9 + 4 + 1) - 2 - 2$ .

**2.2. Les  $t$ -cores auto-conjugués.** Maintenant, nous en venons à la définition d'une sous-famille de  $\mathcal{P}_{(t)}$  qui apparait naturellement dans les preuves de nos formules en types  $\tilde{C}$  et  $\tilde{C}^\sim$ . Nous définissons les  *$t$ -cores auto-conjugués* comme les éléments  $\lambda$  de  $\mathcal{P}_{(t)}$  satisfaisant  $\lambda = \lambda^*$ , où  $\lambda^*$  est la partition conjuguée de  $\lambda$  (voir Définition 2.2). Nous dénotons par  $SC_{(t)}$  l'ensemble des  $t$ -cores auto-conjugués et par  $\lfloor t/2 \rfloor$  le plus grand entier inférieur ou égal à  $t/2$ .

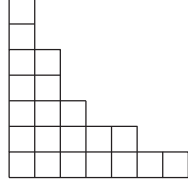


FIGURE 2.2. La partition auto-conjuguée  $\lambda = (7, 5, 3, 2, 2, 1, 1)$ , qui est aussi un 3-core.

**PROPOSITION 3.3.** *Il existe une bijection (explicite)  $\phi_1$  entre les partitions  $\lambda \in SC_{(t)}$  et les vecteurs d'entiers  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{\lfloor t/2 \rfloor}$ , telle que si  $\phi_1(\lambda) := \mathbf{n}$ , alors :*

$$(15) \quad |\lambda| = t\|\mathbf{n}\|^2 + \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{avec } \mathbf{c} := \begin{cases} (1, 3, \dots, t-1) & \text{pour } t \text{ pair,} \\ (2, 4, \dots, t-1) & \text{pour } t \text{ impair.} \end{cases}$$

Ce résultat est une conséquence directe de [24, Equation (7.4)], en définissant l'image d'un  $t$ -core auto-conjugué  $\lambda$  par  $\phi_1$  comme étant le vecteur dont les composantes sont les  $\lfloor t/2 \rfloor$  dernières composantes de  $\phi(\lambda)$ .

Par exemple, le 3-core auto-conjugué  $\lambda$  de la Figure 2.2 satisfait  $\phi(\lambda) = (3, 0, -3)$ ; en conséquence de quoi son image par  $\phi_1$  est le vecteur  $(-3)$ .

Une étude plus poussée des  $(2t)$ -cores auto-conjugués sera effectuée dans le paragraphe 4.1.

**2.3. Les  $t$ -cores de partitions à parts distinctes doublées.** Nous allons avoir besoin d'une autre sous-famille de  $\mathcal{P}_{(t)}$  dans notre preuve du Théorème 3.1. Soit  $\mu^0$  une partition à parts distinctes. Nous notons  $S(\mu^0)$  le diagramme de Ferrers décalé de  $\mu^0$ , qui est le diagramme de Ferrers dans lequel pour tous les  $1 \leq i \leq \ell(\mu^0)$ , la  $i^{\text{ème}}$  ligne est décalée de  $i$  unités vers la droite (voir la Figure 2.3 ci-dessous).

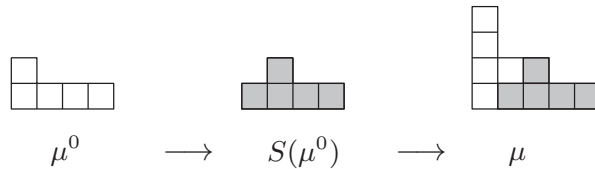


FIGURE 2.3. La construction de la partition à parts distinctes doublées  $\mu = (5, 3, 1, 1)$ , obtenue à partir de  $\mu^0 = (4, 1)$ .

**DÉFINITION 3.4** ([24]). Nous définissons la *partition à parts distinctes doublées*  $\mu$  issue de  $\mu^0$  comme étant la partition dont le diagramme de Ferrers est obtenu en ajoutant  $\mu_i^0$  cases à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $S(\mu^0)$  pour tous les  $1 \leq i \leq \ell(\mu^0)$ . Nous



dénotons par  $DD$  l'ensemble des partitions à parts distinctes doublées et par  $DD_{(t)}$  son sous-ensemble des  $t$ -cores.

Notons que l'ensemble  $DD$  peut aussi être défini comme l'ensemble des partitions  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell)$  telles que  $\mu_i = \mu_i^* + 1$  pour tous les  $i \in \{1, \dots, D(\mu)\}$ . En termes de notation de Frobenius, cela se traduit par le fait que les partitions à parts distinctes doublées sont exactement celles dont les notations de Frobenius sont de la forme  $\begin{pmatrix} \beta_1 + 1 & \dots & \beta_{D(\lambda)} + 1 \\ \beta_1 & \dots & \beta_{D(\lambda)} \end{pmatrix}$ .

En outre, d'après la définition et des calculs directs, une partition à parts distinctes doublées  $\mu$  vérifie les propriétés suivantes, illustrées dans la Figure 2.4, et qui seront utiles plus tard dans le Théorème 3.18 et le Lemme 4.3 :

- si  $1 \leq i, j \leq D(\mu)$ , alors les cases  $(i, j)$  et  $(j, i)$  ont la même longueur d'équerre,
- si  $1 \leq i \leq D(\mu)$ , alors la longueur d'équerre de la case  $(i, i)$  est le double de celle de la case  $(i, D(\mu) + 1)$ ,
- si  $D(\mu) + 1 \leq i$  et  $1 \leq j \leq D(\mu)$ , alors les cases  $(i, j)$  et  $(j, i + 1)$  ont la même longueur d'équerre.

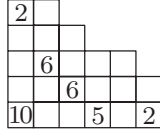


FIGURE 2.4. Illustration pour  $\mu = (6, 6, 5, 3, 2)$ .

PROPOSITION 3.5. *Il existe une bijection  $\phi_2$  entre les partitions  $\mu \in DD_{(t)}$  et les vecteurs d'entiers  $\phi_2(\mu) := \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{\lfloor (t-1)/2 \rfloor}$ , telle que :*

$$(16) \quad |\mu| = t\|\mathbf{n}\|^2 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}, \quad \text{avec } \mathbf{d} := \begin{cases} (2, 4, \dots, t-2) & \text{pour } t \text{ pair,} \\ (1, 3, \dots, t-2) & \text{pour } t \text{ impair.} \end{cases}$$

À nouveau, la Proposition 3.5 est une conséquence directe de [24, Bijection 4], en définissant l'image d'un  $t$ -core à parts distinctes doublées  $\mu$  par  $\phi_2$  comme étant le vecteur dont les composantes sont les  $\lfloor (t-1)/2 \rfloor$  dernières composantes de  $\phi(\mu)$ . L'équation (16) provient des relations  $n_0 = 0$ , et  $n_i = -n_{t-i}$  pour  $1 \leq i \leq t-1$  dans [24, Bijection 4], et d'un calcul immédiat.

Par exemple, le 3-core à parts distinctes doublées  $\mu = (5, 3, 1, 1)$  de la Figure 2.3, à droite, satisfait  $\phi(\mu) = (0, 2, -2)$  ; ainsi son image par  $\phi_2$  est le vecteur  $(-2)$ .

**2.4. Une fonction génératrice simple pour  $SC_{(t)} \times DD_{(t)}$ .** Nous nous concentrons maintenant sur les couples de  $t$ -cores dans l'ensemble  $SC_{(t)} \times DD_{(t)}$ . Nous pouvons en particulier calculer la fonction génératrice de ces objets. Soit  $(\lambda, \mu)$  un élément de  $SC_{(t)} \times DD_{(t)}$ . On définit le poids de  $(\lambda, \mu)$  comme  $|\lambda| + |\mu|$ , et on note  $h_t$  la fonction génératrice

$$(17) \quad h_t(q) := \sum_{(\lambda, \mu) \in SC_{(t)} \times DD_{(t)}} q^{|\lambda| + |\mu|}.$$

Nous aimerions mentionner maintenant que le premier pas dans notre découverte du Théorème 3.1 fut le calcul (par des moyens informatiques) des développements de Taylor de  $h_2(q)$ ,  $h_3(q)$ ,  $h_4(q)$ , dont les premiers termes semblaient coïncider

avec ceux de la fonction génératrice des vecteurs d'entiers impliqués dans (11) pour  $t = 2, 3, 4$ .

PROPOSITION 3.6. *L'égalité suivante est valable pour tout entier  $t \geq 1$  :*

$$(18) \quad h_t(q) = \frac{(q^2; q^2)_\infty}{(q; q)_\infty} (q^t; q^t)_\infty (q^{2t}; q^{2t})_\infty^{t-2},$$

où  $(a; q)_\infty := \prod_{j \geq 1} (1 - aq^{j-1})$  est la  $q$ -factorielle montante infinie.

DÉMONSTRATION. Les fonctions génératrices de  $SC_{(t)}$  et de  $DD_{(t)}$  sont déjà connues (voir [24]), mais chacune a une expression différente selon la parité de  $t$ . Nous supposons d'abord que  $t$  est impair. La fonction génératrice des  $t$ -cores auto-conjugués est alors :

$$\sum_{\lambda \in SC_{(t)}} q^{|\lambda|} = \frac{(-q; q^2)_\infty (q^{2t}; q^{2t})_\infty^{(t-1)/2}}{(-q^t; q^{2t})_\infty},$$

tandis que la fonction génératrice des  $t$ -cores à parts distinctes doublées est :

$$\sum_{\mu \in DD_{(t)}} q^{|\mu|} = \frac{(-q^2; q^2)_\infty (q^{2t}; q^{2t})_\infty^{(t-1)/2}}{(-q^{2t}; q^{2t})_\infty}.$$

Grâce à l'égalité classique  $(-q^t; q^{2t})_\infty (-q^{2t}; q^{2t})_\infty = (-q^t; q^t)_\infty$ , multiplier ces deux fonctions génératrices donne :

$$\begin{aligned} h_t(q) &= (-q; q)_\infty \frac{(q^{2t}; q^{2t})_\infty}{(-q^t; q^t)_\infty} (q^{2t}; q^{2t})_\infty^{t-2} \\ &= \frac{(q^2; q^2)_\infty}{(q; q)_\infty} (q^t; q^t)_\infty (q^{2t}; q^{2t})_\infty^{t-2}, \end{aligned}$$

ce qui établit la propriété cherchée pour  $t$  impair. Comme le calcul dans le cas  $t$  pair est presque identique, nous ne donnerons pas plus de détails ici.  $\square$

### 3. Une formule de Nekrasov-Okounkov en type $\tilde{C}$

Le but de cette partie est de démontrer le Théorème 3.1. La stratégie globale est la suivante : on part de la formule de Macdonald (11) en type  $\tilde{C}_t$ , dans laquelle on remplace la somme sur des vecteurs d'entiers par une somme sur des couples de  $(t+1)$ -cores, le premier étant dans  $SC_{(t+1)}$ , et le second dans  $DD_{(t+1)}$ . Pour ce faire, nous allons avoir besoin d'une bijection  $\varphi$  satisfaisant certaines propriétés que nous allons détailler. Cela nous permettra d'établir le Théorème 3.17 du paragraphe 3.2 ci-dessous pour tout entier  $t \geq 2$ . Un argument de polynômialité nous permettra alors d'étendre la validité de ce théorème pour tout nombre complexe  $t$ . Ensuite, une bijection naturelle entre les couples  $(\lambda, \mu)$  de  $SC \times DD$ , et les partitions à parts distinctes doublées de poids  $|\lambda| + |\mu|$  nous permettra de conclure la preuve du Théorème 3.1. Notons que lors de l'étape finale, les deux partitions  $\lambda$  et  $\mu$  ne sont plus astreintes à être des  $(t+1)$ -cores.

**3.1. La bijection  $\varphi$  entre paires de  $(t+1)$ -cores et vecteurs d'entiers relatifs.** Dans tout ce paragraphe, on suppose que  $t \geq 2$  est un entier fixé.

DÉFINITION 3.7. Si  $(\lambda, \mu)$  est un couple appartenant à  $SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$ , on dénote par  $\Delta$  l'ensemble des longueurs d'équerres principales de  $\lambda$  et  $\mu$ , et pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$ , on définit :

$$(19) \quad \Delta_i := \max(\{h \in \Delta, h \equiv \pm i - t - 1 \pmod{2t+2}\} \cup \{i - t - 1\}).$$

Le terme  $i - t - 1$  est présent dans la Définition précédente pour le cas où l'ensemble  $\Delta$  ne contient aucun élément congru à  $\pm i - t - 1$  modulo  $2t+2$ .

Par exemple, pour  $\lambda = (7, 5, 3, 2, 2, 1, 1)$ ,  $\mu = (5, 3, 1, 1)$  et  $t+1 = 3$ , on a  $\Delta = \{13, 8, 7, 2, 1\}$ ,  $\Delta_1 = 8$ , et  $\Delta_2 = 13$  (voir Figure 3.1).

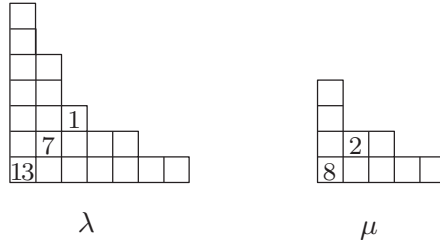


FIGURE 3.1. Calcul de  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  pour un couple  $(\lambda, \mu) \in SC_{(3)} \times DD_{(3)}$ .

Comme  $\lambda$  (respectivement  $\mu$ ) est auto-conjugée (respectivement à parts distinctes doublées), chacune de ses longueurs d'équerres principales est impaire (respectivement paire). La connaissance de l'ensemble  $\Delta$  permet donc de déduire l'ensemble des longueurs d'équerres principales de  $\lambda$  ainsi que l'ensemble des longueurs d'équerres principales de  $\mu$ . Ce faisant, cela permet ainsi de reconstruire de manière unique les deux partitions  $\lambda$  et  $\mu$ . Le théorème suivant montre qu'en fait, lorsque ces partitions sont toutes deux des  $(t+1)$ -cores, il est suffisant de connaître les entiers  $\Delta_i$  pour retrouver les deux partitions  $\lambda$  et  $\mu$  (et donc que connaître les longueurs d'équerres principales maximales dans leurs classes de congruences modulo  $2t+2$  est suffisant).

DÉFINITION 3.8. Rappelons que les bijections  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ont été définies respectivement dans les Propositions 3.3 et 3.5, et fixons  $(\lambda, \mu)$  un couple appartenant à  $SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$ . On définit  $\varphi(\lambda, \mu) := \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_t) \in \mathbb{Z}^t$  comme suit :

- si  $(t+1)$  est impair, alors  $n_{2i}$  (respectivement  $n_{2i+1}$ ) est la  $i$ -ème composante de  $\phi_1(\lambda)$  (respectivement  $\phi_2(\mu)$ );
- si  $(t+1)$  est pair,  $n_{2i}$  (respectivement  $n_{2i+1}$ ) est la  $i$ -ème composante de  $\phi_2(\mu)$  (respectivement  $\phi_1(\lambda)$ ).

THÉORÈME 3.9. Soit  $t \geq 2$  un entier et fixons  $\mathbf{e} := (1, 2, \dots, t)$ . L'application  $\varphi$  entre  $SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$  et  $\mathbb{Z}^t$  est une bijection telle que si  $\varphi(\lambda, \mu) := \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_t)$ , alors on a :

$$(20) \quad |\lambda| + |\mu| = (t+1)\|\mathbf{n}\|^2 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = (t+1) \sum_{i=1}^t (n_i^2 + in_i).$$

En outre, la relation suivante est valable pour tout entier  $i \in \{1, \dots, t\}$  :

$$(21) \quad t+1 + \Delta_i = \sigma_i((2t+2)n_i + i),$$

où

$$(22) \quad \sigma_i := \begin{cases} 1 & \text{si } n_i \geq 0, \\ -1 & \text{si } n_i < 0 \end{cases}$$

Par exemple, le couple de 3-cores  $(\lambda, \mu)$  de la Figure 3.1 satisfait  $\varphi(\lambda, \mu) = (-2, -3)$ ; et on a  $31 = |\lambda| + |\mu| = 3(4 + 9) + 1(-2) + 2(-3)$ . De plus,  $\Delta_1 = 8$ ,  $\Delta_2 = 13$ . On vérifie que  $3 + \Delta_1 = 11 = -(6n_1 + 1)$ , et  $3 + \Delta_2 = 16 = -(6n_2 + 2)$ .

DÉMONSTRATION. À partir de sa définition, il est immédiat de constater que  $\varphi$  est une bijection, en tant que concaténation des deux bijections  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Pour établir (20), il est suffisant de sommer les deux équations (15) et (16) dans lesquelles on a préalablement remplacé  $t$  par  $t + 1$ . Il reste alors seulement à montrer (21), ce qui est la partie difficile de notre théorème.

Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple de  $SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$ , fixons  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_t)$  son image par  $\varphi$ , et  $i$  un entier de  $\{1, \dots, t\}$ . On note  $\mathbf{n}' = (n'_0, n'_1, \dots, n'_t)$  (respectivement  $\mathbf{n}'' = (n''_0, n''_1, \dots, n''_t)$ ) l'image de  $\lambda$  (respectivement  $\mu$ ) par  $\phi$ , ainsi que  $h_{\lambda, \ell\ell}$  (respectivement  $h_{\mu, \ell\ell}$ ) la longueur d'équerre de la case  $(\ell, \ell)$  de  $\lambda$  (respectivement  $\mu$ ). La preuve (21) provient d'un examen précis de l'action des trois bijections  $\phi$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sur les deux partitions  $\lambda$  et  $\mu$ . Douze cas différents sont à examiner, selon les distinctions suivantes :

- $(t + 1)$  est pair ou impair ;
- $i$  est pair ou impair ;
- $n_i$  est strictement positif, strictement négatif, ou nul.

• **Cas 1 :**  $t + 1$  est pair,  $i = 2j + 1$  est impair,  $n_{2j+1} > 0$ .

Dans ce cas, la définition de  $\varphi$  garantit que  $n_{2j+1} = n'_{\frac{t+1}{2}+j+1}$ . Par définition de  $\phi$  (voir le paragraphe 2.1), la positivité de  $n'_{\frac{t+1}{2}+j+1}$  implique qu'il existe dans le diagramme des  $(t + 1)$ -résidus de  $\lambda$  une ligne d'indice minimal  $\ell$  (avec  $\ell \leq D(\lambda)$ ), telle que  $\frac{t+1}{2} + j$  soit exposé à la fin de cette ligne, dans la région  $n'_{\frac{t+1}{2}+j+1}$ . Comme  $\lambda$  est auto-conjuguée, on peut en déduire que :

$$\begin{aligned} h_{\lambda, \ell\ell} &= 2 \left[ (t + 1)(n'_{\frac{t+1}{2}+j+1} - 1) + \frac{t + 1}{2} + j + 1 \right] - 1 \\ &= (2t + 2)n_{2j+1} - t - 1 + (2j + 1). \end{aligned}$$

En particulier, on a  $h_{\lambda, \ell\ell} \equiv 2j + 1 + t + 1 \pmod{2t + 2}$ ; et par minimalité de  $\ell$ , cette longueur d'équerre principale est maximale dans sa classe de congruence. Ainsi  $h_{\lambda, \ell\ell} = \Delta_{2j+1}$  et donc

$$\Delta_{2j+1} = [(2t + 2)n_{2j+1} + (2j + 1)] - t - 1.$$

• **Cas 2 :**  $t + 1$  est pair,  $i = 2j + 1$  est impair, et  $n_{2j+1} < 0$ .

Pour  $n_{2j+1} < 0$ , on a cette fois  $n_{2i+1} = n'_{\frac{t+1}{2}+j+1} = -n'_{\frac{t+1}{2}-j}$ , avec  $n'_{\frac{t+1}{2}-j} > 0$ . Cette positivité implique que  $\frac{t+1}{2} - j - 1$  est exposé au bout d'une ligne d'indice minimal  $\ell$ , dans la région  $n'_{\frac{t+1}{2}-j}$ . Comme  $\lambda$  est auto-conjuguée, on a :

$$\begin{aligned} h_{\lambda, \ell\ell} &= 2 \left[ (t + 1)(-n'_{\frac{t+1}{2}+j+1} - 1) + \frac{t + 1}{2} - j \right] - 1 \\ &= -(2t + 2)n_{2j+1} - t - 1 - (2j + 1). \end{aligned}$$

De la même manière que dans le cas 1, on obtient :

$$\Delta_{2j+1} = -[(2t+2)n_{2j+1} + (2j+1)] - t - 1.$$

- **Cas 3** :  $t+1$  est pair,  $i = 2j+1$  est impair,  $n_{2j+1} = 0$ .

Ici, il n'y a pas de longueur d'équerre principale égale à  $\pm(2j+1)+t+1 \pmod{2t+2}$ , donc  $\Delta_{2j+1} = (2j+1) - t - 1$ , et ainsi (21) est satisfaite.

- **Cas 4** :  $t+1$  est pair,  $i = 2j$  est pair,  $n_{2j} > 0$ . Cette fois, par définition de  $\varphi$ , la partition impliquée est  $\mu$  et  $n_{2j} = n''_{\frac{t+1}{2}+j+1}$ . Par définition de  $\phi$ , cette positivité de  $n''_{\frac{t+1}{2}+j+1}$  implique qu'il existe dans le diagramme des  $(t+1)$ -résidus de  $\mu$  une ligne d'indice minimal  $\ell$  (avec  $\ell \leq D(\lambda)$ ), telle que  $\frac{t+1}{2} + j$  soit exposé au bout de cette ligne, dans la région  $n''_{\frac{t+1}{2}+j+1}$ . Comme  $\mu$  est une partition à parts distinctes doublées, on en déduit que :

$$\begin{aligned} h_{\mu,\ell} &= 2 \left[ (t+1)(n''_{\frac{t+1}{2}+j+1} - 1) + \frac{t+1}{2} + j + 1 \right] - 2 \\ &= (2t+2)n_{2j+1} - t - 1 + (2j). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons  $h_{\mu,\ell} \equiv 2j + t + 1 \pmod{2t+2}$ ; et cette longueur d'équerre est maximale dans sa classe de congruence. Donc

$$h_{\mu,\ell} = \Delta_{2j} = [(2t+2)n_{2j} + (2j)] - t - 1.$$

- **Les huit cas restants** : ils peuvent chacun être prouvés de manière similaire à un des quatre cas précédents, en remarquant que lorsque  $t+1$  est impair, les rôles de  $\lambda$  et  $\mu$  sont intervertis par définition de  $\varphi$ .  $\square$

La preuve du théorème précédent nous permet de déduire facilement la description récursive suivante de la bijection réciproque de  $\varphi$ , qui est plus simple que la description de  $\varphi$ . Si nous fixons un vecteur  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_t)$  dans  $\mathbb{Z}^t$ , alors  $(\lambda, \mu) = \varphi^{-1}(\mathbf{n})$  satisfait les propriétés suivantes :

- si tous les  $n_i$  sont égaux à zéro, alors les partitions  $\lambda$  et  $\mu$  sont toutes deux vides ;
- si un des  $n_i$  est égal à 1, alors une des deux partitions  $\lambda$  ou  $\mu$ , en fonction de la parité de  $t+1+i$ , contient une longueur d'équerre principale égale à  $t+1+i$  (et pas d'autres équerres congrues à  $t+1 \pm i \pmod{2t+2}$ ) ;
- si un des  $n_i$  est égal à  $-1$ , alors une des deux partitions contient une longueur d'équerre principale égale à  $t+1-i$  (et pas d'autres équerres congrues à  $t+1 \pm i \pmod{2t+2}$ ) ;
- la préimage de  $(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_t)$  si  $n_i > 0$  (respectivement  $(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_t)$  si  $n_i < 0$ ) est égale à la préimage de  $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_t)$  dans laquelle on ajoute dans une des deux partitions une équerre principale de longueur  $(t+1)(2n_i - 1) + i$  (respectivement  $(t+1)(-2n_i - 1) - i$ ). (Notons que cet ajout peut se faire d'une manière unique, étant donnée la structure de partitions auto-conjuguées ou à parts distinctes doublées de  $\lambda$  et  $\mu$ .)

On peut remarquer qu'en fait les deux propriétés intermédiaires peuvent être déduites de la première et de la dernière.

On peut vérifier toutes ces propriétés pour le couple  $(\lambda, \mu) \in SC_{(3)} \times DD_{(3)}$  de la Figure 3.1. On a  $n_1 = -2$ , et il y a deux longueurs d'équerres principales congrues à

3 – 1 modulo 6, qui sont 2 et 8. On a  $n_2 = -3$ ; et il y a deux longueurs d'équerres principales congrues à 3 – 2 modulo 6, qui sont 1, 7 et 13.

REMARQUE 3.10. Il y a trois conséquences immédiates à la description récursive précédente de  $\varphi^{-1}$ , qui vont nous servir plus tard.

(i) Il ne peut pas y avoir dans  $\Delta$  à la fois un entier égal à  $i + t + 1 \pmod{2t + 2}$  et un entier égal à  $-i + t + 1 \pmod{2t + 2}$ .

(ii) Si  $h > 2t + 2$  appartient à  $\Delta$ , alors  $h - 2t - 2$  aussi.

(iii) Si un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$  satisfait les deux propriétés précédentes (i) et (ii), et ne contient aucun élément égal à zéro modulo  $2t + 2$ , alors c'est l'ensemble  $\Delta$  d'un couple de  $(t + 1)$ -cores  $(\lambda, \mu) \in SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$ .

À nouveau, les propriétés (i) et (ii) de la Remarque 3.10 peuvent être vérifiées pour le couple  $(\lambda, \mu) \in SC_{(3)} \times DD_{(3)}$  de la Figure 3.1, dont l'ensemble des longueurs d'équerres principales est  $\{13, 8, 7, 2, 1\}$ .

En utilisant notre bijection  $\varphi$ , et en fixant  $v_i = (2t + 2)n_i + i$  pour  $1 \leq i \leq t$ , on peut remplacer la somme dans l'identité de Macdonald de type  $\tilde{C}$  (11) par une somme sur les couples  $(\lambda, \mu) \in SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$  (et non plus sur des vecteurs d'entiers). En conséquence, (11) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)^{2t^2 + t} \\
 &= c_1 \sum_{\lambda, \mu} x^{|\lambda| + |\mu|} \prod_i ((2t + 2)n_i + i) \prod_{i < j} (((2t + 2)n_i + i)^2 - ((2t + 2)n_j + j)^2) \\
 &= c_1 \sum_{\lambda, \mu} x^{|\lambda| + |\mu|} \prod_i \sigma_i(t + 1 + \Delta_i) \prod_{i < j} ((t + 1 + \Delta_i)^2 - (t + 1 + \Delta_j)^2).
 \end{aligned}$$

(Rappelons que  $\sigma_i$  est égal à 1 (respectivement  $-1$ ) si  $n_i \geq 0$  (respectivement si  $n_i < 0$ ).)

**3.2. Simplification des coefficients.** L'étape suivante de la preuve du Théorème 3.1 consiste en une simplification des deux produits présents dans le membre de droite de (23), de manière à ce qu'ils ne dépendent plus des entiers  $\Delta_i$  (et plus généralement de manière à ce qu'ils ne dépendent plus de classes de congruence modulo  $2t + 2$ ). Dans ce but, nous avons besoin de la notion suivante, qui avait été définie dans [28], mais uniquement pour les entiers impairs.

DÉFINITION 3.11. Un ensemble fini d'entiers  $A$  est un *ensemble  $2t + 2$ -compact* si et seulement si il satisfait les conditions suivantes :

- (i)  $-1, -2, \dots, -2t - 1$  appartiennent à  $A$ ;
- (ii) pour tout  $a \in A$  tel que  $a \neq -1, -2, \dots, -2t - 1$ , on a  $a \geq 1$  et  $a \not\equiv 0 \pmod{2t + 2}$ ;
- (iii) soit  $b > a \geq 1$  deux entiers tels que  $a \equiv b \pmod{2t + 2}$ . Si  $b \in A$ , alors  $a \in A$ .

Soit  $A$  un ensemble  $2t + 2$ -compact. Un élément  $a \in A$  est  *$2t + 2$ -maximal* si pour tout entier  $b > a$  tel que  $a \equiv b \pmod{2t + 2}$ ,  $b \notin A$  (i.e.  $a$  est maximal dans sa classe de congruence modulo  $2t + 2$ ). L'ensemble des éléments  $2t + 2$ -maximaux est noté  $\max_{2t+2}(A)$ . Il est clair par définition des ensembles compacts que  $A$  est déterminé de manière unique par  $\max_{2t+2}(A)$ .

EXEMPLE 3.12. L'ensemble  $\{25, 20, 19, 14, 13, 9, 8, 7, 3, 2, 1, -1, -2, -3, -4, -5\}$  est un ensemble 6-compact. Ses éléments 6-maximaux sont 25, 20, 19,  $-1$  et  $-2$ .

Nous pouvons montrer le lemme suivant, dont la preuve est analogue à celle de [28, Lemme 2.4], mais dans le cas pair.

LEMME 3.13. *Pour tout ensemble  $2t+2$ -compact  $A$ , l'égalité suivante est vérifiée :*

$$(24) \quad \prod_{a \in \max_{2t+2}(A)} \frac{a + 2t + 2}{a} = - \prod_{a \in A, a > 0} \left( 1 - \left( \frac{2t + 2}{a} \right)^2 \right).$$

DÉMONSTRATION. Comme  $2t + 2$  est un entier pair, on a :

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots (2t + 1)}{(-2t - 1) \cdots (-2) \cdot (-1)} = -1.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} - \prod_{a \in A, a > 0} \left( 1 - \left( \frac{2t + 2}{a} \right)^2 \right) = \\ \frac{1}{(-2t - 1)} \times \frac{2}{(-2t)} \times \cdots \times \frac{(2t + 1)}{-1} \times \prod_{a \in A, a > 0} \frac{(a - 2t - 2)}{a} \times \frac{(a + 2t + 2)}{a}, \end{aligned}$$

et le résultat s'ensuit en télescopant des termes dans le produit grâce à la propriété (iii) des ensembles compacts.  $\square$

Désormais, notre stratégie va être de faire une récurrence sur le nombre d'équerres principales du couple  $(\lambda, \mu)$  apparaissant dans (23). Les deux lemmes suivants sont deux étapes intermédiaires qui aideront par la suite à effectuer ladite récurrence.

Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple de  $SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$  avec  $\lambda$  ou  $\mu$  non vide, et soit  $\Delta$  l'ensemble des longueurs d'équerres principales de  $\lambda$  et  $\mu$ , à partir duquel on peut définir les entiers  $\Delta_i$  de la Définition 3.7. On dénote par  $h_{11}$  l'élément maximal de  $\Delta$ . Nous notons aussi  $(\lambda', \mu') \in SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$  le couple obtenu en supprimant l'équerre principale de longueur  $h_{11}$ . On note  $\Delta'$  l'ensemble des longueurs d'équerres principales de  $\lambda'$  et  $\mu'$ , et on considère les entiers  $\Delta'_i$  associés.

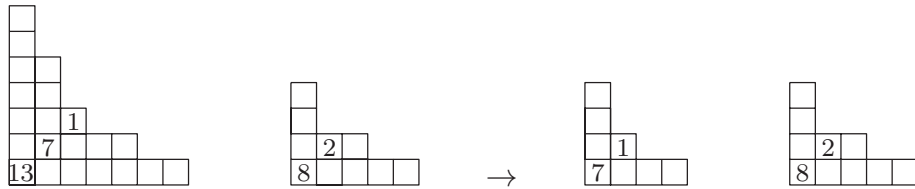


FIGURE 3.2. À gauche, un élément  $(\lambda, \mu) \in SC_{(3)} \times DD_{(3)}$ . À droite, le couple associé  $(\lambda', \mu')$ .

Dans l'exemple de la figure 3.2, nous avons  $t + 1 = 3$ ,  $\Delta = \{13, 8, 7, 2, 1\}$ ,  $\Delta_1 = 8$  et  $\Delta_2 = 13$ . On a aussi  $\Delta' = \{8, 7, 2, 1\}$ ,  $\Delta'_1 = 8$  et  $\Delta'_2 = 7$ .

LEMME 3.14. *Si  $i_0$  est l'unique entier tel que  $\Delta_{i_0} = h_{11}$ , alors l'égalité suivante est vérifiée :*

$$(25) \quad \prod_i \frac{\sigma_i(t+1+\Delta_i)}{\sigma'_i(t+1+\Delta'_i)} \prod_{i < j} \frac{(t+1+\Delta_i)^2 - (t+1+\Delta_j)^2}{(t+1+\Delta'_i)^2 - (t+1+\Delta'_j)^2} \\ = \left(1 - \frac{2t+2}{h_{11}}\right) \left(1 - \frac{t+1}{h_{11}}\right) \left(\frac{h_{11}}{h_{11}-2t-2} \frac{2h_{11}}{2h_{11}-2t-2}\right) \left(\frac{h_{11}+t+1}{h_{11}-t-1}\right) \\ \times \prod_{j \neq i_0} \frac{(h_{11}+\Delta_j+2t+2)(h_{11}-\Delta_j)}{(h_{11}+\Delta_j)(h_{11}-\Delta_j-2t-2)}.$$

DÉMONSTRATION. Premièrement, nous pouvons remarquer que

$$\left(1 - \frac{2t+2}{h_{11}}\right) \left(1 - \frac{t+1}{h_{11}}\right) = \left(\frac{h_{11}}{h_{11}-2t-2} \frac{2h_{11}}{2h_{11}-2t-2}\right)^{-1}.$$

Cependant, ces termes sont introduits (un peu artificiellement) ici afin de rendre plus simple l'énoncé du lemme suivant. Pour démontrer (25), nous examinons les conséquences sur les entiers  $\Delta_i$  de la suppression de la plus grande des équerres principales. Pour tout  $i \neq i_0$ , on a  $\Delta_i = \Delta'_i$  et ainsi  $\sigma_i = \sigma'_i$ . En effet, le seul maximum des classes de congruences des longueurs d'équerres principales  $2t+2$  qui peut être affecté par cette suppression est  $\Delta_{i_0}$ . On en déduit que :

$$\prod_i \frac{\sigma_i(t+1+\Delta_i)}{\sigma'_i(t+1+\Delta'_i)} \prod_{i < j} \frac{(t+1+\Delta_i)^2 - (t+1+\Delta_j)^2}{(t+1+\Delta'_i)^2 - (t+1+\Delta'_j)^2} \\ = \frac{\sigma_{i_0}(t+1+\Delta_{i_0})}{\sigma'_{i_0}(t+1+\Delta'_{i_0})} \prod_{j \neq i_0} \frac{(t+1+\Delta_{i_0})^2 - (t+1+\Delta_j)^2}{(t+1+\Delta'_{i_0})^2 - (t+1+\Delta'_j)^2}.$$

On veut maintenant réécrire le côté droit de l'égalité précédente. Nous sommes amenés à considérer trois cas suivant la valeur de  $h_{11} = \Delta_{i_0}$ .

- Si  $h_{11} > 2t+2$ , selon la Remarque 3.10 (i) et (ii), on sait que  $h_{11} - 2t - 2$  appartient à  $\Delta$ , et donc appartient aussi à  $\Delta'$ . Ainsi,  $\Delta'_{i_0} = \Delta_{i_0} - 2t - 2$ . Dans ce cas, on a  $\sigma_{i_0} = \sigma'_{i_0}$  et

$$\frac{\sigma_{i_0}(t+1+\Delta_{i_0})}{\sigma'_{i_0}(t+1+\Delta'_{i_0})} = \frac{h_{11}+t+1}{h_{11}-t-1}.$$

Finalement, on peut réécrire le produit sur les  $j \neq i_0$  en utilisant une identité remarquable pour obtenir (25).

- Si  $t+1 < h_{11} < 2t+2$ , d'après la définition des  $\Delta_{i_0}$  et la Remarque 3.10 (i), on sait que  $h_{11} = t+1+i_0$  et  $\sigma_{i_0} = 1$ . Dans ce cas, comme on supprime la seule équerre de longueur égale à  $\pm i+t+1 \pmod{2t+2}$ , on a  $\Delta'_{i_0} = i_0 - t - 1 = h_{11} - 2t - 2$ , et  $\sigma'_{i_0} = 1$ . Ainsi,

$$\frac{\sigma_{i_0}(t+1+\Delta_{i_0})}{\sigma'_{i_0}(t+1+\Delta'_{i_0})} = \frac{h_{11}+t+1}{h_{11}-t-1},$$

et, de plus, le produit sur les  $j \neq i_0$  peut être réécrit de la même manière que dans le cas précédent.



- Si  $0 < h_{11} < t + 1$ , par la définition des  $\Delta_{i_0}$  et la Remarque 3.10 (i), on sait que  $h_{11} = t + 1 - i_0$  et  $\sigma_{i_0} = -1$ . Dans ce cas, on a  $\Delta'_{i_0} = i_0 - t - 1 = -h_{11}$  et  $\sigma'_{i_0} = 1$ , ce qui prouve que :

$$\frac{\sigma_{i_0}(t + 1 + \Delta_{i_0})}{\sigma'_{i_0}(t + 1 + \Delta'_{i_0})} = -\frac{t + 1 + h_{11}}{t + 1 - h_{11}} = \frac{h_{11} + t + 1}{h_{11} - t - 1}.$$

La forme (25) du produit sur les  $j \neq i_0$  vient à nouveau immédiatement après avoir remarqué que

$$(t + 1 + \Delta'_{i_0})^2 = (t + 1 - h_{11})^2 = (h_{11} - t - 1)^2.$$

□

LEMME 3.15. *Avec les mêmes notations que précédemment, on définit l'ensemble  $E$  comme :*

$$(26) \quad E := \left( \bigcup_{j \neq i_0} \{h_{11} + \Delta_j, h_{11} - \Delta_j - 2t - 2\} \right) \cup \{h_{11} - t - 1, h_{11} - 2t - 2, 2h_{11} - 2t - 2\}.$$

*Il existe un unique ensemble  $2t + 2$ -compact  $H$ , tel que  $E = \max_{2t+2}(H)$ . En outre, son sous-ensemble  $H_{>0}$  composé de ses éléments positifs est indépendant de  $t$  et est constitué des entiers de la forme  $h_{11} + \tau_m m$ , où  $1 \leq m \leq h_{11} - 1$ , et  $\tau_m$  est égal à 1 si  $m$  est une longueur d'équerre principale (i.e.  $m \in \Delta$ ) et à  $-1$  sinon.*

DÉMONSTRATION. Pour montrer que l'ensemble  $E$  est le  $\max_{2t+2}(H)$  d'un ensemble  $H$ , il est par définition suffisant de montrer que  $E$  contient  $2t + 1$  éléments, que chacun de ses éléments sont distincts deux à deux modulo  $2t + 2$ , et qu'aucun de ses éléments n'est égal à 0 modulo  $2t + 2$ . Chacune de ces propriétés sont des conséquences immédiates de la définition des  $\Delta_i$  (voir la Définition 3.7). En outre, l'unicité de  $H$  est immédiate par définition des ensembles  $2t + 2$  compacts (voir la Définition 3.11).

Il reste à montrer que l'ensemble  $H_{>0}$  et que l'ensemble  $H'$  constitué des éléments de la forme  $h_{11} + \tau_m m$ , avec  $1 \leq m \leq h_{11} - 1$ , sont identiques. Nous commençons par prouver l'inclusion  $H_{>0} \subset H'$ . Dans ce but, nous remarquons tout d'abord que les éléments de  $E$  sont aussi des éléments de  $H_{>0}$ . Qui plus est, on peut décrire tous les éléments de  $H_{>0}$  à partir de ceux de  $E$  ; plus précisément, à partir de chaque élément  $x$  de  $E$ , nous allons décrire tous les éléments de  $H_{>0}$  qui sont dans la même classe de congruence modulo  $2t + 2$  que  $x$ . Il restera alors à montrer que ces éléments sont aussi dans  $H'$ . Comme  $E$  contient exactement un élément par classe de congruence possible (excepté pour la classe de congruence de 0), on aura alors bien montré que  $H_{>0} \subset H'$ .

Soit  $i$  le reste dans la division euclidienne de  $h_{11}$  par  $2t + 2$ , et écrivons  $h_{11} = 2k(t + 1) + i$ . Deux cas peuvent se produire : ou bien  $i \in \{1, \dots, t\}$ , ou bien  $i \in \{t + 2, \dots, 2t + 1\}$ . On ne va traiter ici que le premier cas, le second pouvant être étudié de la même manière.

L'élément  $x := h_{11} - (t + 1)$  de  $E$  est strictement positif si et seulement si  $k > 0$ , ce qui implique alors que les entiers appartenant à  $H_{>0}$  et étant dans la même classe de congruence modulo  $2t + 2$  que  $x$  sont exactement les entiers  $h_{11} - (t + 1), h_{11} - 3(t + 1), \dots, h_{11} - (2k - 1)(t + 1)$ . Chaque entier  $m \in \{(t + 1), 3(t + 1), \dots, (2k - 1)(t + 1)\}$

n'est pas une longueur d'équerre principale de  $\lambda$  ou  $\mu$ , et est strictement plus petit que  $h_{11}$ , on a donc  $\tau_m = -1$ . Ainsi,  $h_{11} - m$  appartient à  $H'$ , pour chacun des entiers  $m$  susmentionnés.

L'élément  $x := h_{11} - 2(t+1)$  de  $E$  est strictement positif si et seulement si  $k > 0$ , ce qui implique que les entiers appartenant à  $H_{>0}$  et étant dans la même classe de congruence modulo  $2t+2$  que  $x$  sont exactement les entiers  $h_{11} - 2(t+1), h_{11} - 4(t+1), \dots, h_{11} - 2k(t+1)$ . Chaque entier  $m \in \{2(t+1), 4(t+1), \dots, 2k(t+1)\}$  n'est pas une longueur d'équerre principale de  $\lambda$  ou  $\mu$  et est strictement plus petit que  $h_{11}$ , donc on a  $\tau_m = -1$ . Ainsi,  $h_{11} - m$  appartient à  $H'$ .

L'élément  $x := 2h_{11} - 2t - 2$  dans  $E$  est strictement positif si et seulement si  $k > 0$ , ce qui implique que les éléments appartenant à  $H_{>0}$  et étant dans la même classe de congruence modulo  $2t+2$  que  $x$  sont exactement les entiers  $2h_{11} - 2(t+1), 2h_{11} - 4(t+1), \dots, 2h_{11} - 4k(t+1)$ . Ces éléments appartiennent tous à  $H'$  pour une des deux raisons suivantes. Premièrement, chaque entier  $m \in \{(2k-2)(t+1) + i, (2k-4)(t+1) + i, \dots, i\}$  est une longueur d'équerre principale strictement plus petite que  $h_{11}$  d'après la Remarque 3.10, donc nous avons  $\tau_m = 1$  et ainsi les entiers  $2h_{11} - 2(t+1), \dots, 2h_{11} - 2k(t+1)$  appartiennent tous à  $H'$ . Deuxièmement, les entiers  $m \in \{2k(t+1) - i, (2k-2)(t+1) - i, \dots, 2(t+1) - i\}$  ne sont pas des longueurs d'équerres principales selon la Remarque 3.10, et sont plus petits que  $h_{11}$ , donc nous avons  $\tau_m = -1$  et par conséquent les entiers  $2h_{11} - 4k(t+1), \dots, 2h_{11} - (2k+2)(t+1)$  appartiennent tous à  $H'$ .

Pour les autres éléments  $x$  de  $E$ , nous devons à nouveau distinguer deux cas. Si nous effectuons la division euclidienne de  $\Delta_{t+1-j}$  par  $2(t+1)$ , nous obtenons ou bien  $\Delta_{t+1-j} = 2\ell(t+1) + j$ , ou bien  $\Delta_{t+1-j} = 2\ell(t+1) - j$  (par définition de  $\Delta_{t+1-j}$ ). A nouveau, nous ne traitons que le premier cas, le second pouvant être traité de manière similaire.

L'élément  $x := h_{11} + \Delta_{t+1-j} = 2(k+\ell)(t+1) + i + j$  de  $E$  est strictement positif, ce qui implique que les éléments de  $H_{>0}$  qui sont dans la même classe de congruence modulo  $2t+2$  que  $x$  sont exactement les entiers  $2(k+\ell)(t+1) + i + j, 2(k+\ell-1)(t+1) + i + j, \dots, i + j$ . L'élément  $y := h_{11} - \Delta_{t+1-j} - 2(t+1) = 2(k-\ell-1)(t+1) + i + j$  de  $E$  est strictement positif si et seulement si  $k > \ell$  ce qui implique que les éléments de  $H_{>0}$  qui sont dans la même classe de congruence modulo  $2t+2$  que  $y$  sont exactement les entiers  $2(k-\ell-1)(t+1) + i - j, \dots, 2(t+1) + i - j, i - j$  (l'entier  $i - j$  ne devant être considéré que si il est positif). Chacun de ces éléments est aussi dans  $H'$  pour l'une des deux raisons suivantes. Premièrement, chaque entier  $m \in \{j, 2(t+1) + j, \dots, 2\ell(t+1) + j\}$  est une longueur d'équerre principale de  $\lambda$  ou  $\mu$  (d'après la Remarque 3.10), donc on a  $\tau_m = 1$ . Par conséquent, les entiers  $2k(t+1) + i + j, \dots, 2(k+\ell)(t+1) + i + j$  appartiennent tous à  $H'$ . Deuxièmement, aucun des entiers  $m \in \{2(t+1) - j, \dots, 2k(t+1) - j\}$  ou  $m \in \{2(\ell+1)(t+1) + j, \dots, 2k(t+1) + j\}$  n'est une longueur d'équerre principale (en vertu de la même remarque ou de la définition des  $\Delta_{t+1-j}$ ), ainsi  $\tau_m = -1$ . Donc les entiers  $2(k-1)(t+1) + i + j, \dots, i + j$  et  $2(k-\ell-1)(t+1) + i - j, \dots, 2(t+1) + i - j, i - j$  sont tous des éléments de  $H'$ , ce qui clôt la preuve de l'inclusion  $H_{>0} \subset H'$ .

Enfin, nous devons vérifier que les éléments de  $H'$  appartiennent aussi à  $H_{>0}$ , ce qui peut se faire de manière similaire, car chacune des étapes de la preuve de l'inclusion  $H_{>0} \subset H'$  est en fait une équivalence.  $\square$

Maintenant, nous pouvons démontrer le lemme suivant.

LEMME 3.16. *Si le couple  $(\lambda, \mu)$  appartient à  $SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$  et  $(n_1, \dots, n_t) := \varphi(\lambda, \mu)$ , alors l'égalité suivante est vérifiée :*

$$(27) \quad \prod_i ((2t+2)n_i + i) \prod_{i < j} (((2t+2)n_i + i)^2 - ((2t+2)n_j + j)^2) \\ = \frac{\delta_\lambda \delta_\mu}{c_1} \prod_{h \in \Delta} \left(1 - \frac{2t+2}{h}\right) \left(1 - \frac{t+1}{h}\right) \prod_{j=1}^{h-1} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{h + \tau_j j}\right)^2\right),$$

où  $\delta_\lambda$  et  $\delta_\mu$  sont définis dans le paragraphe 1.1 du chapitre 2, et où  $\tau_j$  est défini dans le Lemme 3.15.

DÉMONSTRATION. L'idée est ici de faire une récurrence sur le nombre d'équerres principales du couple  $(\lambda, \mu)$ , en supprimant à chaque étape de la récurrence l'équerre principale de plus grande longueur  $h_{11} \in \Delta$ , avec l'aide des deux lemmes précédents. Dans ce but, nous notons  $P$  le membre gauche de (27) et, en utilisant  $\varphi$ , nous transformons  $P$  en des produits impliquant les nombres  $\Delta_i$ , de la même manière que lorsque nous avons établis (23) :

$$P = \prod_i \sigma_i(t+1 + \Delta_i) \prod_{i < j} ((t+1 + \Delta_i)^2 - (t+1 + \Delta_j)^2).$$

En utilisant les notations qui précèdent le Lemme 3.14, nous définissons de la même manière

$$P' := \prod_i \sigma'_i(t+1 + \Delta'_i) \prod_{i < j} ((t+1 + \Delta'_i)^2 - (t+1 + \Delta'_j)^2).$$

Le Lemme 3.14 nous permet alors de montrer que

$$(28) \quad P = \left( \frac{h_{11}}{h_{11} - 2t - 2} \frac{2h_{11}}{2h_{11} - 2t - 2} \frac{h_{11} + t + 1}{h_{11} - t - 1} \right) \prod_{j \neq i_0} \frac{(h_{11} + \Delta_j + 2t + 2)(h_{11} - \Delta_j)}{(h_{11} + \Delta_j)(h_{11} - \Delta_j - 2t - 2)} \\ \times \left(1 - \frac{2t+2}{h_{11}}\right) \left(1 - \frac{t+1}{h_{11}}\right) \times P'.$$

Alors le Lemme 3.15 nous assure que l'ensemble  $E$  défini dans (26) est l'ensemble  $\max_{2t+2}(H)$  d'un unique ensemble  $2t+2$ -compact  $H$ , avec le sous-ensemble de ses éléments positifs  $H_{>0} := \{h_{11} - \tau_m m, 1 \leq m \leq h_{11} - 1\}$ . Ainsi, nous pouvons donc appliquer le Lemme 3.13 pour montrer que

$$\left( \frac{h_{11}}{h_{11} - 2t - 2} \frac{2h_{11}}{2h_{11} - 2t - 2} \frac{h_{11} + t + 1}{h_{11} - t - 1} \right) \prod_{j \neq i_0} \frac{(h_{11} + \Delta_j + 2t + 2)(h_{11} - \Delta_j)}{(h_{11} + \Delta_j)(h_{11} - \Delta_j - 2t - 2)} \\ = - \prod_{j=1}^{h_{11}-1} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{h_{11} + \tau_j j}\right)^2\right).$$

L'équation (28) devient alors :

$$P = - \left(1 - \frac{2t+2}{h_{11}}\right) \left(1 - \frac{t+1}{h_{11}}\right) \prod_{j=1}^{h_{11}-1} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{h_{11} + \tau_j j}\right)^2\right) \times P'.$$

Finalement, nous faisons une récurrence sur le cardinal de  $\Delta$  en supprimant, ou bien dans  $\lambda$  ou bien dans  $\mu$ , l'équerre principale de plus grande longueur. Il y a  $D(\lambda) +$

$D(\mu)$  étapes dans cette récurrence, et chacune des étapes donne lieu à l'apparition d'un signe  $-$ . Cela explique le terme  $\delta_\lambda \delta_\mu$ . Le cas de base correspond à des partitions  $\lambda$  et  $\mu$  toutes deux vides. Dans ce cas  $\Delta_i = i - t - 1$ , pour tout  $1 \leq i \leq t$ , et ainsi :

$$\prod_i \sigma_i(t+1+\Delta_i) \prod_{i < j} ((t+1+\Delta_i)^2 - (t+1+\Delta_j)^2) = \prod_i i \prod_{i < j} (i^2 - j^2) = \frac{1}{c_1},$$

où nous rappelons que  $c_1$  est définie dans (11).  $\square$

**3.3. Fin de la preuve du Théorème 3.1.** Nous pouvons désormais démontrer le résultat suivant, qui sera vu par la suite comme étant équivalent au Théorème 3.1.

THÉOREME 3.17. *L'identité suivante est valable pour tout nombre complexe  $t$  :*

$$(29) \quad \prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{2t^2+t} = \sum_{\lambda, \mu} \delta_\lambda \delta_\mu x^{|\lambda|+|\mu|} \\ \times \prod_{h \in \Delta} \left(1 - \frac{2t+2}{h}\right) \left(1 - \frac{t+1}{h}\right) \prod_{j=1}^{h-1} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{h+\tau_j j}\right)^2\right),$$

où la somme porte sur les couples  $(\lambda, \mu)$  de partitions, avec  $\lambda$  auto-conjugué et  $\mu$  à parts distinctes doublées.

DÉMONSTRATION. Grâce à la formule de Macdonald en type  $\tilde{C}$  (11) ainsi qu'au Lemme 3.16, l'équation (29) est vérifiée si la somme porte sur les couples  $(\lambda, \mu) \in SC_{(t+1)} \times DD_{(t+1)}$  et si  $t$  est un entier positif. Nous allons montrer que le produit

$$Q := \prod_{h \in \Delta} \left(1 - \frac{2t+2}{h}\right) \left(1 - \frac{t+1}{h}\right) \prod_{j=1}^{h-1} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{h+\tau_j j}\right)^2\right)$$

s'annule si le couple  $(\lambda, \mu)$  n'est pas un couple de  $(t+1)$ -cores. En effet, fixons  $(\lambda, \mu) \in SC \times DD$ , et soit  $\Delta$  l'ensemble des équerres principales de  $\lambda$  et  $\mu$ . On montre alors que  $Q$  s'annule à moins que  $\Delta$  ne satisfasse les trois hypothèses du (iii) de la Remarque 3.10. Pour cela, nous effectuons un raisonnement par l'absurde et supposons  $Q \neq 0$ .

Premièrement, soit  $h > 2t+2$  un élément de  $\Delta$ . Si  $j := h - 2t - 2$  n'était pas une longueur d'équerre principale, alors le terme correspondant à  $j$  dans le second produit de  $Q$  s'annulerait par définition de  $\tau_j$ . La propriété (ii) est donc vérifiée par  $\Delta$ .

Deuxièmement, soit  $k, k', i$  des entiers positifs tels que  $1 \leq i \leq t$ . Si  $(2k+1)(t+1)+i$  et  $(2k'+1)(t+1)-i$  appartiennent tous deux à  $\Delta$ , alors par une récurrence immédiate utilisant la propriété établie dans le premierement,  $t+1+i$  et  $t+1-i$  appartiennent aussi tous deux à  $\Delta$ . Mais alors, le terme  $1 - \left(\frac{2t+2}{(t+1+i)+(t+1-i)}\right)^2$  s'annule, ce qui contredit  $Q \neq 0$ . Ainsi  $(2k+1)(t+1)+i$  et  $(2k'+1)(t+1)-i$  ne peuvent pas être tous deux des longueurs d'équerres principales si  $Q$  est non nul. La propriété (i) est donc satisfaite par  $\Delta$ .

Troisièmement, si  $\Delta$  contient des multiples de  $t+1$ , nous notons  $h$  la plus petite de ces longueurs d'équerres principales. Si  $h = t+1$  ou  $h = 2t+2$ , alors le premier produit de  $Q$  s'annule. Sinon,  $h - 2t - 2$  n'appartient pas à  $\Delta$  par minimalité de  $h$ , et le terme correspondant à  $j = h - 2t - 2$  dans le second produit de  $Q$  s'annule. Ainsi  $\Delta$  ne peut contenir de multiples de  $t+1$ .

Selon la Remarque 3.10 (iii), si  $Q \neq 0$ , alors  $(\lambda, \mu)$  est un couple de  $(t+1)$ -cores. Ainsi, la formule (29) reste valable pour tout entier  $t$  si la somme porte sur les couples de  $SC \times DD$ .

Pour terminer cette preuve, nous utilisons un argument de polynômialité pour généraliser (29) à tous les nombres complexes  $t$ . Dans ce but, nous nous servons de la formule suivante (voir [28, Équation (3.9)]) :

$$(30) \quad \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - x^k} = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k(1 - x^k)} \right),$$

pour réécrire le côté gauche de (29) sous la forme

$$(31) \quad \exp \left( -(2t^2 + t) \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k(1 - x^k)} \right).$$

Soit  $m$  un entier positif. Le coefficient  $C_m(t)$  de  $x^m$  dans le côté gauche de (29) est polynômial en  $t$ , grâce à (31), tout comme le coefficient  $D_m(t)$  de  $x^m$  dans le côté droit. La formule (29) étant établie pour tout entier  $t \geq 2$ , elle est donc également valable pour tout nombre complexe  $t$ , ce qui clôt cette démonstration.  $\square$

Soit  $(\lambda, \mu)$  dans  $SC \times DD$ , ayant  $\Delta$  comme ensemble de longueurs d'équerres principales. Nous dénotons par  $2\Delta$  l'ensemble des éléments de  $\Delta$  multipliés par 2. Notons que nous pouvons associer bijectivement à  $(\lambda, \mu)$  une partition  $\nu \in DD$  avec longueurs d'équerres principales  $2\Delta$ , comme illustré ci-dessous. (La bijectivité venant du fait qu'une partition à parts distinctes doublées est uniquement déterminée par ses longueurs d'équerres principales.)

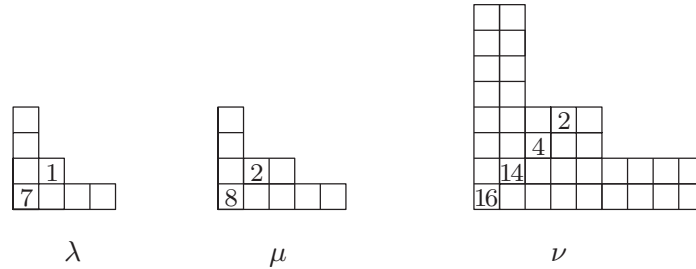


FIGURE 3.3. Exemple de construction de  $\nu$ .

THÉORÈME 3.18. *La partition  $\nu$  satisfait  $|\lambda| + |\mu| = |\nu|/2$ ,  $\delta_\lambda \delta_\mu = \delta_\nu$ , et*

$$(32) \quad \prod_{h \in \Delta} \left( 1 - \frac{2t+2}{h} \right) \left( 1 - \frac{t+1}{h} \right) \prod_{j=1}^{h-1} \left( 1 - \left( \frac{2t+2}{h + \tau_j j} \right)^2 \right) = \prod_{h \in \nu} \left( 1 - \frac{2t+2}{h \varepsilon_h} \right),$$

où on rappelle que  $\varepsilon_h$  est égal à  $-1$  si  $h$  est la longueur d'équerre d'une case située strictement au dessus de la diagonale principale du diagramme de Ferrers de  $\nu$ , et à  $1$  sinon, et que  $\tau_j$  vaut  $1$  si  $j$  appartient à  $\Delta$  et  $-1$  sinon.

DÉMONSTRATION. Les deux premières propriétés sont immédiates d'après les définitions de  $\nu$  et  $\delta_\nu$ , le point difficile ici étant d'établir (32). Nous le prouvons par récurrence sur le nombre d'éléments de  $\Delta$ . Le résultat est trivial si les partitions  $\lambda$  et  $\mu$  sont toutes deux vides. Si  $\lambda$  ou  $\mu$  est non vide, nous notons  $\Delta^1 > \Delta^2 > \dots > \Delta^\ell$  les éléments (ordonnés) de  $\Delta$ , et nous écrivons  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)$ . Nous allons montrer l'égalité suivante :

$$(33) \quad \left(1 - \frac{2t+2}{\Delta^1}\right) \left(1 - \frac{t+1}{\Delta^1}\right) \prod_{j=1}^{\Delta^1-1} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{\Delta^1 + \tau_j j}\right)^2\right) = \prod_h \left(1 - \frac{2t+2}{h \varepsilon_h}\right),$$

où le produit du côté droit porte sur les cases de la plus grande des équerres principales de  $\nu$ . Cette égalité est alors suffisante pour établir la récurrence.

Nous notons  $h_{\nu,i,j}$  la longueur d'équerre de la case  $(i,j)$  dans  $\nu$ . Trois cas sont à distinguer suivant la position de cette case : ou bien elle est sur la diagonale principale, ou bien elle se trouve dans le carré de Durfee mais pas sur la diagonale, ou bien elle ne se trouve pas dans le carré de Durfee.

D'après la définition de  $\nu$ , on a  $h_{\nu,1,1} = 2\Delta^1$  et  $D(\nu) = \ell = \#\Delta$ . Comme  $\nu$  est une partition à parts distinctes doublées, un calcul direct montre que  $h_{\nu,1,\ell+1} = \Delta^1$ . Ainsi

$$(34) \quad \left(1 - \frac{2t+2}{\Delta^1}\right) \left(1 - \frac{t+1}{\Delta^1}\right) = \left(1 - \frac{2t+2}{h_{\nu,1,1} \varepsilon_{h_{\nu,1,1}}}\right) \left(1 - \frac{2t+2}{h_{\nu,1,\ell+1} \varepsilon_{h_{\nu,1,\ell+1}}}\right).$$

Soit  $i$  dans  $\{2, \dots, \ell\}$ . Comme  $\nu$  est une partition à parts distinctes doublées, nous avons  $h_{\nu,i,1} = h_{\nu,1,i}$  par calcul direct. Par construction de  $\nu$ , on a  $h_{\nu,i,1} = \nu_i - i + \nu_1^* = \Delta^i + \Delta^1$ . Comme  $\varepsilon_{h_{\nu,i,1}} = -\varepsilon_{h_{\nu,1,i}}$ , on obtient :

$$(35) \quad 1 - \left(\frac{2t+2}{\Delta^1 + \Delta^i}\right)^2 = \left(1 - \frac{2t+2}{h_{\nu,i,1} \varepsilon_{h_{\nu,i,1}}}\right) \left(1 - \frac{2t+2}{h_{\nu,1,i} \varepsilon_{h_{\nu,1,i}}}\right).$$

Soit  $i$  dans  $\{\ell+1, \dots, \Delta^1\}$ , nous écrivons  $i = \ell + i'$  avec  $i'$  dans  $\{1, \dots, \Delta^1 - \ell\}$ , et nous notons  $\nabla_{\Delta^1-\ell} > \dots > \nabla_2 > \nabla_1$  les entiers entre 1 et  $\Delta^1$  (au sens large) qui n'appartiennent pas à  $\Delta$ . Par exemple, dans la Figure 3.3, nous avons  $(\nabla_4, \nabla_3, \nabla_2, \nabla_1) = (6, 5, 4, 3)$ . Comme  $\nu$  est une partition à parts distinctes doublées, nous avons  $h_{\nu,i,1} = h_{\nu,1,i+1}$ . Par construction de  $\nu$ , nous avons  $\nu_i - i = -\nabla_{i'}$ , et donc  $h_{\nu,i,1} = \nu_i - i + \nu_1^* = \Delta^1 - \nabla_{i'}$ . Comme  $\varepsilon_{h_{\nu,i,1}} = -\varepsilon_{h_{\nu,1,i+1}}$ , on en déduit que :

$$(36) \quad 1 - \left(\frac{2t+2}{\Delta^1 - \nabla_{i'}}\right)^2 = \left(1 - \frac{2t+2}{h_{\nu,i,1} \varepsilon_{h_{\nu,i,1}}}\right) \left(1 - \frac{2t+2}{h_{\nu,1,i+1} \varepsilon_{h_{\nu,1,i+1}}}\right).$$

Le produit de (34), (35) et (36) sur tout les  $i \in \{1, \dots, \Delta^1\}$  donne exactement (33), car on a :

$$\prod_{j=1}^{\Delta^1-1} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{\Delta^1 + \tau_j j}\right)^2\right) = \prod_{i=2}^{\ell} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{\Delta^1 + \Delta^i}\right)^2\right) \prod_{i'=1}^{\Delta^1-\ell} \left(1 - \left(\frac{2t+2}{\Delta^1 - \nabla_{i'}}\right)^2\right).$$

□

Le Théorème 3.1 découle facilement des deux Théorèmes 3.17 et 3.18.

**3.4. Quelques applications et adaptations aux types  $\widetilde{B}$  et  $\widetilde{BC}$ .** Nous donnons ici quelques applications du Théorème 3.1. Premièrement, prendre  $t = -1$  dans (12) mène au célèbre développement suivant (voir par exemple [76, p. 69]), où la somme porte sur les partitions  $\lambda$  à parts distinctes :

$$(37) \quad \prod_{n \geq 1} (1 - x^n) = \sum_{\lambda} (-1)^{\#\{\text{parts of } \lambda\}} x^{|\lambda|}.$$

Ensuite, rappelons la très classique formule des équerres (on pourra se référer à [74, Corollary 7.12.6])

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ |\lambda| = n}} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{1}{h^2} = \frac{1}{n!},$$

qui peut être prouvée notamment en utilisant la correspondance de Robinson–Schensted, et qui joue un rôle important dans la théorie des représentations du groupe de Coxeter de type  $A$  (le groupe symétrique). De cette formule, et en extrayant des coefficients dans le Théorème 3.1 en utilisant aussi (9), on peut déduire le résultat suivant, qui peut être vu comme une *formule symplectique des équerres*, ce qui est expliqué par le dénominateur du côté droit, qui est le cardinal du groupe de Coxeter de type  $B_n$  (pour  $n \geq 2$ ).

THÉORÈME 3.19. *Pour tout entier positif  $n$ , on a :*

$$(38) \quad \sum_{\substack{\lambda \in DD \\ |\lambda| = 2n}} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{1}{h} = \frac{1}{2^n n!}.$$

On ne détaillera pas ici la preuve de cette formule qui utilise le Théorème 3.1, car elle est aussi une conséquence beaucoup plus directe du Corollaire 4.16 du chapitre suivant.

**Un problème (presque) ouvert.** Il est à remarquer que si on note  $f_{\lambda}$  le nombre de tableaux de Young de forme  $\lambda$ , la formule des équerres nous permet de réécrire (38) sous la forme suivante :

$$(39) \quad \sum_{\substack{\lambda \in DD \\ |\lambda| = 2n}} f_{\lambda} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Le membre de droite est alors le produit des  $n$  premiers nombres impairs (appelé aussi double factorielle), qui est le nombre d'involutions sans point fixe du groupe symétrique  $S_{2n}$ . Cette formule (39) est à comparer avec celle que l'on obtient pour le groupe symétrique via la correspondance de Robinson–Schensted :

$$(40) \quad \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ |\lambda| = 2n}} f_{\lambda} = \#\{\text{involutions de } S_{2n}\}.$$

Il est à noter que la correspondance de Robinson–Schensted ne permet pas, ou du moins pas directement, de montrer (39), car l'image des involutions sans points fixes par la correspondance de Robinson–Schensted n'est pas l'ensemble des paires  $(T, T)$  avec  $T$  un tableau de Young ayant pour forme une partition à parts distinctes doublées. Plus généralement, une question naturelle est de se demander quelle est la préimage par la correspondance de Robinson–Schensted des couples  $(T, T')$  de

tableaux de Young tels que  $T$  et  $T'$  ont pour forme  $\lambda$ , avec  $\lambda$  une partition de  $2n$  à parts distinctes doublées.

Une preuve directe, et notamment bijective, de (39) peut cependant être obtenue via une des quatre correspondances de Burge [12, paragraphe 4, correspondance pour l'Équation (6)], en restreignant celle-ci aux involutions sans points fixes.

Finalement, nous pouvons démontrer le résultat suivant, qui établit un lien surprenant entre les formules de Macdonald en types affines  $\widetilde{C}$ ,  $\widetilde{B}$ , et  $\widetilde{BC}$ .

**THÉORÈME 3.20.** *Les familles suivantes d'identités découlent toutes du Théorème 3.1 :*

(i) *la formule de Macdonald (11) en type  $\widetilde{C}_t$  pour tout entier  $t \geq 2$  ;*

(ii) *la formule de Macdonald en type  $\widetilde{B}_t$  pour tout entier  $t \geq 3$  :*

$$\eta(x)^{2t^2+t} = c_1 \sum_{\mathbf{v}} x^{\|\mathbf{v}\|^2/8(2t-1)} \prod_i v_i \prod_{i < j} (v_i^2 - v_j^2),$$

*où la somme porte sur les  $t$ -uplets  $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $v_i \equiv 2i - 1 \pmod{4t-2}$  et  $v_1 + \dots + v_t = t^2 \pmod{8t-4}$  ;*

(iii) *la formule de Macdonald en type  $\widetilde{BC}_t$  pour tout entier  $t \geq 1$  :*

$$\eta(x)^{2t^2-t} = c_2 \sum_{\mathbf{v}} x^{\|\mathbf{v}\|^2/8(2t+1)} (-1)^{(v_1+\dots+v_t-t)/2} \prod_{i < j} (v_i^2 - v_j^2),$$

*avec  $c_2 := \frac{(-1)^{(t-1)/2} t!}{1!2! \dots (t-1)!}$ , et où la somme porte sur les  $t$ -uplets  $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_t)$*

*appartenant à  $\mathbb{Z}^t$  tels que  $v_i \equiv 2i - 1 \pmod{4t+2}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme les méthodes sont similaires à celles utilisées dans la preuve du Théorème 3.1, nous mettons seulement ici l'emphasis sur les idées. En substituant  $u := -t - 1/2$  dans (12), et en ne considérant que les valeurs entières positives de  $u$ , nous prouvons d'abord que le produit dans le côté droit s'annule pour toutes les partitions  $\lambda$ , à l'exception de celles qui ne contiennent pas de cases strictement au dessus de la diagonale ayant une longueur d'équerre égale à  $2u - 1$ . En utilisant des lemmes techniques analogues aux Lemmes 3.13–3.16 (dans le sens inverse) et une bijection analogue à  $\varphi$ , on peut alors déduire la formule de Macdonald en type  $\widetilde{B}_u$  pour tous les entiers  $u \geq 3$ . Le même raisonnement s'applique pour le type  $\widetilde{BC}_\ell$ , en effectuant la substitution  $\ell := t - 1/2$  et en considérant les valeurs entières de  $\ell \geq 1$ . Les partitions qui apparaissent alors naturellement sont des  $(2\ell+1)$ -cores.  $\square$

### 3.5. Raffinement d'un résultat dû à Kostant. Écrivons

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^s = \sum_{k \geq 0} f_k(s) x^k.$$

Kostant a démontré au moyen de considérations sur les algèbres de Lie le résultat suivant [44, Théorème 4.28].

**THÉORÈME 3.21 ([44]).** *Soit  $k$  et  $m$  deux entiers positifs tels que  $m \geq \max(k, 4)$ . Alors  $f_k(m^2 - 1) \neq 0$ .*

Remarquons que l'énoncé originel  $m > 1$  dans le théorème de Kostant doit être remplacé par la condition  $m \geq 4$  pour être valable, comme cela a été remarqué par Han [28]. Ce théorème a été raffiné par Han dans [28, Théorème 1.6] de la manière suivante.



THÉOREME 3.22 ([28]). *Soit  $k$  un entier positif et  $s$  un nombre réel tel que  $s \geq k^2 - 1$ . Alors  $(-1)^k f_k(s) > 0$ .*

Dans la même idée de ce que fit Han, on peut raffiner différemment le Théorème 3.21, à l'aide du Théorème 3.1. Malencontreusement, ce qu'on l'on obtient est un cas particulier du Théorème 3.22.

THÉOREME 3.23. *Soit  $k$  un entier positif et  $s$  un nombre réel tel que  $s > k - 1$ . Alors  $(-1)^k f_k(2s^2 + s) > 0$ .*

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 3.1, on peut écrire

$$f_k(2s^2 + s) = \sum_{\lambda \in DD, |\lambda| = 2k} W(\lambda),$$

où  $W(\lambda) := \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left(1 - \frac{2s+2}{h \varepsilon_h}\right)$ .

En notant  $\mathcal{H}(\lambda)_\leq$  (respectivement  $\mathcal{H}(\lambda)_>$ ) le multi-ensemble des longueurs d'équerres des cases en dessous (respectivement strictement au dessus) de la diagonale principale de  $\lambda$ , on a

$$\begin{aligned} W(\lambda) &= \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( \frac{h - \varepsilon_h(2s+2)}{h} \right) \\ &= \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)_\leq} \left( \frac{h - (2s+2)}{h} \right) \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)_>} \left( \frac{h + (2s+2)}{h} \right) \\ &= \delta_\lambda (-1)^{\#\mathcal{H}(\lambda)_\leq} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)_\leq} \left( \frac{2s+2-h}{h} \right) \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)_>} \left( \frac{h+2s+2}{h} \right) \\ &= (-1)^k \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)_\leq} \left( \frac{2s+2-h}{h} \right) \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)_>} \left( \frac{h+2s+2}{h} \right), \end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence de  $(-1)^{\#\mathcal{H}(\lambda)_\leq} = (-1)^k \delta_\lambda$ . Comme  $|\lambda| = 2k$ , la condition  $2s+2 > 2k$  implique que les deux derniers produits sont positifs. Ainsi  $(-1)^k W(\lambda) > 0$  et le résultat s'ensuit.  $\square$

#### 4. Le cas du type $\tilde{C}^\sim$

Nous prouvons dans cette section une formule de type Nekrasov-Okounkov pour le type  $\tilde{C}^\sim$ . Rappelons que dans ce type, une des formules de Macdonald s'écrit sous la forme suivante, pour tout  $t$  entier supérieur ou égal à 2 :

$$(41) \quad \left( \frac{\eta(x^2)^{t+1}}{\eta(x)} \right)^{2t-1} = c_2 \sum_{\mathbf{v}} x^{\|\mathbf{v}\|^2/8t} \prod_{i < j} (v_i^2 - v_j^2),$$

avec  $c_2$  la constante définie dans le Théorème 3.20, et où la somme porte sur les  $t$ -uplets  $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $v_i \equiv 2i - 1 \pmod{4t}$ . Nous montrons ici la généralisation suivante.

THÉOREME 3.24. *Pour tout nombre complexe  $z$ , le développement suivant est valable :*

$$(42) \quad \left( \prod_{k \geq 1} \frac{(1 - x^{2k})^{z+1}}{1 - x^k} \right)^{2z-1} = \sum_{\lambda \in SC} \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 - \frac{2z}{h \varepsilon_h} \right),$$

où la somme porte sur les partitions auto-conjuguées  $\lambda$ ;  $\delta_\lambda$  est égal à 1 si le carré de Durfee de  $\lambda$  est de taille paire, et  $-1$  sinon; et  $\varepsilon_h$  est égal à  $-1$  si  $h$  est la longueur d'équerre d'une case strictement au dessus de la diagonale principale dans le diagramme de Ferrers de  $\lambda$  et à 1 sinon.

L'idée de la preuve est la même que pour celle du Théorème 3.1 : partant de l'identité de Macdonald associée au type  $\tilde{C}$ , on applique une bijection pour réécrire cette identité en termes de  $t$ -cores auto-conjugués, puis simplement en termes de partitions auto-conjuguées. Enfin, un argument de polynômialité permet de conclure.

**4.1. Les  $t$ -cores auto-conjugués.** Dans tout ce paragraphe,  $t$  sera un entier fixé.

Rappelons que les définitions des  $t$ -cores et des partitions auto-conjuguées ont été données dans le paragraphe 2.2. Nous allons étudier plus précisément dans ce paragraphe les propriétés de telles partitions.

Nous pouvons tout d'abord remarquer les faits suivants. L'ensemble des longueurs d'équerres d'une partition auto-conjuguée  $\lambda$  est composé uniquement d'entiers positifs impairs. De plus, si  $\Delta$  est un ensemble fini d'entiers impairs, alors il existe une unique partition auto-conjuguée qui a  $\Delta$  comme ensemble d'équerres principales. Pour mieux comprendre les partitions auto-conjuguées, nous avons cependant besoin d'étendre cette notion de longueur d'équerre principale.

DÉFINITION 3.25. Soit  $\lambda$  une partition auto-conjuguée, et soit  $(i, j)$  un couple d'entiers tels que  $1 \leq i, j \leq \lambda_1$ . On définit la *longueur d'équerre généralisée*  $h_{i,j}$  de la case  $(i, j)$  comme :

$$(43) \quad h_{i,j} = \lambda_i - i + \lambda_j - j + 1.$$

		-2	-4	-5
		-1	-3	-4
			-1	-2

FIGURE 4.1. Les longueurs d'équerres généralisées des cases qui n'appartiennent pas à la partition  $\lambda := (4, 2, 1, 1)$ . Les cases grisées sont les cases appartenant à la partition ; les lignes rouges délimitent les autres cases.

Notons que, comme  $\lambda$  est auto-conjuguée, lorsque la case  $(i, j)$  appartient au diagramme de Ferrers de  $\lambda$ , alors les notions de longueur d'équerre généralisée et de longueur d'équerre coïncident. Si la case  $(i, j)$  n'appartient pas au diagramme de Ferrers de  $\lambda$ , un calcul direct montre que  $h_{i,j}$  est l'opposé du nombre de cases  $u$  telles que  $u$  n'appartienne pas au diagramme de Ferrers de  $\lambda$  et que, ou bien  $u$  se trouve sur la même ligne et à gauche de  $(i, j)$ , ou bien  $u$  se trouve dans la même colonne et en dessous de  $(i, j)$ . Notons aussi que, comme  $\lambda$  est auto-conjuguée, toutes ses longueurs d'équerres principales généralisées (c'est-à-dire les longueurs d'équerres

généralisées des cases  $(i, i)$  avec  $1 \leq i \leq \lambda_1$ ) sont impaires. De plus, nous pouvons montrer le lemme suivant.

LEMME 3.26. *Soit  $\lambda$  une partition auto-conjuguée et considérons  $\Delta^g$  son ensemble de longueurs d'équerres principales généralisées. Soit  $i$  un entier impair tel que  $1 \leq i \leq 2\lambda_1 - 1 = h_{1,1}$ . Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i) *ou bien  $i$  ou bien  $-i$  appartient  $\Delta^g$ ,*
- (ii) *si  $i$  appartient à  $\Delta^g$  alors  $-i$  n'y appartient pas.*

DÉMONSTRATION. Nous prouvons tout d'abord (ii). Soit  $i$  un entier impair tel que  $1 \leq i \leq \lambda_1$ . Supposons que  $i$  et  $-i$  appartiennent tous deux à  $\Delta^g$ , et fixons  $(j_1, j_1)$  (respectivement  $(j_2, j_2)$ ) la case de longueur d'équerre principale généralisée égale à  $i$  (respectivement  $-i$ ). Alors la longueur d'équerre généralisée de la case  $(j_1, j_2)$  est égale à :

$$(44) \quad h_{j_1, j_2} = \lambda_{j_1} - j_1 + \lambda_{j_2} - j_2 + 1 = \frac{h_{j_1, j_1} + h_{j_2, j_2}}{2} = 0.$$

Ceci est une contradiction car  $h_{j_1, j_2}$  est le cardinal (ou l'opposé du cardinal) d'un ensemble non vide. Ainsi, (ii) est vérifiée.

Il y a dans  $\Delta^g$  exactement  $\lambda_1$  entiers relatifs impairs (par définition d'une longueur d'équerre généralisée), qui sont tous différents (car les longueurs d'équerres généralisées décroissent strictement le long de la diagonale principale), qui sont tous de valeur absolue inférieure ou égale à  $h_{1,1}$ , et ces entiers satisfont la propriété (ii). Ainsi, par le principe des tiroirs de Dirichlet, ou bien  $i$  ou bien  $-i$  appartient à  $\Delta^g$ .  $\square$

On peut constater que pour la partition auto-conjuguée  $\lambda = (4, 2, 1, 1)$  de la Figure 4.1, l'ensemble  $\{7, 1, -3, -5\}$  de ses longueurs d'équerres principales généralisées vérifie bien les propriétés du lemme ci-dessus.

**4.2. Une bijection entre  $(2t)$ -cores auto-conjugués et des vecteurs d'entiers relatifs.** Dans ce paragraphe nous introduisons une bijection impliquant les  $(2t)$ -cores auto-conjugués.

DÉFINITION 3.27. Soit  $\lambda$  un  $(2t)$ -core auto-conjugué. Pour tout  $i \in \{1, \dots, t\}$ , nous définissons :

$$(45) \quad \Delta_{2i-1} := \max(\{h \in \Delta, h \equiv \pm(2i-1) - 2t \pmod{4t}\} \cup \{2i-1-2t\}).$$

1				
3	1			
4	2			
7	5	2	1	
9	7	4	3	1

FIGURE 4.2. Le 6-core auto-conjugué  $(5, 4, 2, 2, 1)$ . On a  $\Delta_1 = 5$ ,  $\Delta_3 = 9$ , et  $\Delta_5 = -1$

Soit  $\lambda$  un  $(2t)$ -core auto-conjugué dont l'ensemble des longueurs d'équerres principales est  $\Delta$ , et fixons  $\phi(\lambda) := (m_1, \dots, m_{2t})$  son image par  $\phi$ . Rappelons que  $\phi_1(\lambda)$  est d'après la Proposition 3.3 tel que  $\phi_1(\lambda) := (m_{t+1}, m_{t+2}, \dots, m_{2t})$ .

THÉOREME 3.28. Soit  $t \geq 1$  un entier, et fixons le vecteur  $\mathbf{d} := (1, 3, \dots, 2t-1)$ . L'application  $\phi_1$  telle que  $\phi_1(\lambda) := \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_t)$  est une bijection entre  $SC_{(2t)}$  et  $\mathbb{Z}^t$  vérifiant :

$$(46) \quad |\lambda| = 2t\|\mathbf{n}\|^2 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 2t \sum_{i=1}^t (n_i^2 + (2i-1)n_i).$$

En outre, la relation suivante est valable pour tout entier  $i \in \{1, \dots, t\}$  :

$$(47) \quad \sigma_i(4tn_i + 2i - 1) = 2t + \Delta_{2i-1},$$

où  $\sigma_i$  est égal à 1 si  $n_i \geq 0$  et à  $-1$  sinon.

DÉMONSTRATION. Le fait que  $\phi_1(\lambda)$  soit une bijection est une conséquence directe de [24, Section 7], et l'égalité (46) vient de [24, (7.4)]. L'équation (47) vient du Théorème 3.9, appliqué avec  $t+1$  remplacé par  $2t$  et une partition à parts distinctes doublées vide. Rappelons que la preuve de ce théorème vient d'une étude précise de l'action de la bijection  $\phi$  sur les partitions auto-conjuguées.  $\square$

En reprenant l'exemple de la Figure 4.2, on constate que ce 6-core a pour image par  $\phi_1$  le vecteur  $(-1, 1, 0)$ , et que les relations (47) sont vérifiées.

REMARQUE 3.29. De manière analogue à ce qu'il se passe pour la Remarque 3.10, il y a trois conséquences au théorème précédent. Soit  $\lambda$  un  $(2t)$ -core auto-conjugué, et fixons  $\Delta$  l'ensemble de ses longueurs d'équerres principales.

- (i) Il ne peut y avoir dans  $\Delta$  à la fois un nombre entier égal à  $2i - 1 - 2t \pmod{4t}$  et un nombre entier égal à  $-(2i - 1) - 2t \pmod{4t}$ .
- (ii) Si  $h > 4t$  appartient à  $\Delta$ , alors  $h - 4t$  appartient à  $\Delta$ .
- (iii) Si un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$  vérifie les deux propriétés (i) et (ii), et ne contient pas d'entier pair, alors c'est l'ensemble des longueurs d'équerres principales d'un  $(2t)$ -core auto-conjugué.

En écrivant  $v_i = 4tn_i + 2i - 1$  pour tout entier  $i \in \{1, \dots, t\}$ , on peut remplacer la somme dans la formule de Macdonald (41) par une somme sur les  $(2t)$ -cores auto-conjugués grâce à notre bijection  $\phi_1$  et à (47). En utilisant l'égalité

$$(48) \quad \frac{\|v\|^2}{8t} = |\lambda| + \frac{(2t-1)(2t+1)}{24},$$

provenant de (46), nous éliminons le facteur de modularité  $x^{1/24}$  dans la formule de Macdonald. Cela conduit à

$$(49) \quad \left( \prod_{i \geq 1} \frac{(1 - x^{2i})^{t+1}}{1 - x^i} \right)^{2t-1} = c_2 \sum_{\lambda \in SC_{(2t)}} x^{|\lambda|} \prod_{i < j} ((2t + \Delta_i)^2 - (2t + \Delta_j)^2),$$

où le produit dans le membre de droite porte sur les couples d'entiers ordonnés  $i < j$  tels que  $i$  et  $j$  soient impairs et compris entre 1 et  $2t-1$ . Dans tout le paragraphe suivant, les produits de la forme  $\prod_{i < j}$  devront aussi être interprétés de cette manière.

**4.3. Dernières étapes de la preuve du Théorème 3.24.** Dans le but de compléter la preuve du Théorème 3.24, nous voulons réécrire le produit dans le membre de droite de (49). De la même manière que dans la preuve du Théorème 3.1, nous aurons besoin du Lemme 3.13 sur les ensembles  $2t$ -compacts.

La stratégie pour effectuer cette réécriture est de faire une récurrence sur le nombre d'équerres principales de la partition auto-conjuguée apparaissant dans (49). Soit  $\lambda$  un  $(2t)$ -core auto-conjugué non vide, dont l'ensemble de longueurs d'équerres principales est noté  $\Delta$ . Nous dénotons par  $h_{1,1}$  la longueur de sa plus grande équerre principale. En supprimant cette dernière dans le diagramme de Ferrers de  $\lambda$ , nous obtenons à nouveau un  $(2t)$ -core auto-conjugué que nous dénotons par  $\lambda'$ . Nous dénotons aussi par  $\Delta'$  l'ensemble des longueurs d'équerres principales de  $\lambda'$ , et nous considérons les nombres  $\Delta'_i$  qui lui sont associés via la Définition 3.27.

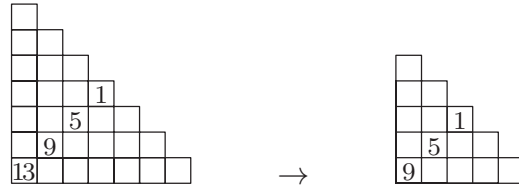


FIGURE 4.3. À gauche, un 6-core auto-conjugué  $\lambda$ . À droite, le 6-core  $\lambda'$  correspondant.

Dans l'exemple de la Figure 4.3 ci-dessus, nous avons  $\Delta_1 = 5$ ,  $\Delta_3 = 9$ , et  $\Delta_5 = 13$ . De plus,  $\Delta'_1 = 5$ ,  $\Delta'_3 = 9$ , et  $\Delta'_5 = 1$ .

Nous montrons maintenant un lemme analogue au Lemme 3.14 ; les deux preuves sont donc similaires.

LEMME 3.30. *Si  $i_0$  est l'unique entier tel que  $\Delta_{i_0} = h_{1,1}$ , alors on a :*

$$(50) \quad \prod_{i < j} \frac{((2t + \Delta_i)^2 - (2t + \Delta_j)^2)}{((2t + \Delta'_i)^2 - (2t + \Delta'_j)^2)} = \frac{h_{1,1} - 2t}{h_{1,1}} \frac{h_{1,1}}{h_{1,1} - 2t} \prod_{j \neq i_0} \frac{h_{1,1} - \Delta_j}{h_{1,1} - \Delta_j - 4t} \frac{h_{1,1} + \Delta_j + 4t}{h_{1,1} + \Delta_j}.$$

DÉMONSTRATION. Premièrement, notons que

$$\frac{h_{1,1} - 2t}{h_{1,1}} \frac{h_{1,1}}{h_{1,1} - 2t} = 1.$$

Pour prouver (50), nous examinons les conséquences sur les nombres  $\Delta_i$  de la suppression de l'équerre principale de longueur  $h_{1,1}$ . Comme nous avons  $\Delta' = \Delta \setminus \{h_{1,1}\}$ , pour tout  $j \neq i_0$ , on a  $\Delta_j = \Delta'_j$ . Ainsi le seul maximum des classes de congruences modulo  $2t$  des longueurs d'équerres principales qui peut être modifié par cette suppression est  $\Delta_{i_0}$ . On en déduit donc que :

$$(51) \quad \prod_{i < j} \frac{((2t + \Delta_i)^2 - (2t + \Delta_j)^2)}{((2t + \Delta'_i)^2 - (2t + \Delta'_j)^2)} = \prod_{j \neq i_0} \frac{(2t + \Delta_{i_0})^2 - (2t + \Delta_j)^2}{(2t + \Delta'_{i_0})^2 - (2t + \Delta_j)^2}.$$

Nous considérons maintenant trois cas dépendant de la valeur de  $h_{1,1} = \Delta_{i_0}$ .

- Si  $h_{1,1} > 4t$ , alors d'après la Remarque 3.29 (ii),  $h_{1,1} - 4t$  est aussi une longueur d'équerre principale de  $\lambda$ , et donc  $\Delta'_{i_0} = h_{1,1} - 4t$  d'après la Remarque 3.29 (i). On a alors :

$$(52) \quad \prod_{j \neq i_0} \frac{(2t + \Delta_{i_0})^2 - (2t + \Delta_j)^2}{(2t + \Delta'_{i_0})^2 - (2t + \Delta_j)^2} = \prod_{j \neq i_0} \frac{(2t + h_{1,1})^2 - (2t + \Delta_j)^2}{(h_{1,1} - 2t)^2 - (2t + \Delta_j)^2} \\ = \prod_{j \neq i_0} \frac{h_{1,1} - \Delta_j}{h_{1,1} - \Delta_j - 4t} \frac{h_{1,1} + \Delta_j + 4t}{h_{1,1} + \Delta_j}.$$

- Si  $2t < h_{1,1} < 4t$ , par définition de  $\Delta_{i_0}$ , on a  $\Delta_{i_0} = h_{1,1} = 2t + i_0$ . D'après la Remarque 3.29 (i),  $2t - i_0$  n'est pas une longueur d'équerre principale de  $\lambda$ , donc  $\Delta'_{i_0} = i_0 - 2t = h_{1,1} - 4t$ . Le même calcul que dans le cas précédent conduit à (50).
- Si  $0 < h_{1,1} < 2t$ , par définition de  $\Delta_{i_0}$ , on a  $\Delta_{i_0} = h_{1,1} = 2t - i_0$ . Donc  $\lambda'$  ne contient ni une longueur d'équerre principale égale à  $2t - i_0 \pmod{4t}$  ni une longueur d'équerre principale égale à  $2t + i_0 \pmod{4t}$ . On a donc  $\Delta'_{i_0} = i_0 - 2t = -h_{1,1}$ . La fin de la preuve est la même que dans les cas précédents.  $\square$

Le lemme suivant est l'analogie pour les  $(2t)$ -cores auto-conjugués du Lemme 3.15.

LEMME 3.31. *Avec les mêmes notations que précédemment, on définit l'ensemble  $E$  comme :*

$$(53) \quad E := \left( \bigcup_{j \neq i_0} \left\{ \frac{h_{1,1} - \Delta_j}{2} - 2t, \frac{h_{1,1} + \Delta_j}{2} \right\} \right) \cup \{h_{1,1} - 2t\}.$$

Alors il existe un unique ensemble  $2t$ -compact  $H$  tel que  $E = \max_{2t}(H)$ . En outre, le sous-ensemble  $H_{>0}$  de ses éléments positifs est indépendant de  $t$  et est composé des longueurs d'équerres de la première colonne de  $\lambda$ , à l'exception de  $h_{1,1}$ .

DÉMONSTRATION. Premièrement, notons que, comme tous les éléments de  $\Delta$  sont impairs, tous les éléments de  $E$  sont des entiers relatifs. Pour montrer que l'ensemble  $E$  est le  $\max_{2t}(H)$  d'un ensemble  $H$ , il est nécessaire et suffisant par définition des ensembles compacts de vérifier que  $E$  contient exactement  $2t - 1$  éléments, que tous ses éléments sont distincts modulo  $2t$  et qu'aucun de ses éléments n'est égal à 0 modulo  $2t$ ; ces trois propriétés découlant directement de la définition des nombres  $\Delta_i$ .

Notons donc  $H_{>0}$  le sous-ensemble des éléments positifs de  $H$ , et notons  $H'$  l'ensemble des longueurs d'équerres de la première colonne de  $\lambda$ , à l'exception de  $h_{1,1}$ . Il nous reste à montrer que  $H_{>0} = H'$ . Une première méthode consisterait, comme dans la preuve du Lemme 3.15, à constater que l'on peut décrire tous les éléments de  $H_{>0}$  à partir des éléments de  $E$  et de vérifier que ces éléments sont aussi des éléments de  $H'$  (et réciproquement). Nous proposons cependant ici une méthode plus simple, qui utilise la notion de longueurs d'équerres généralisées. Rappelons qu'on note  $\Delta$  l'ensemble des longueurs d'équerres principales de  $\lambda$  et  $\Delta^g$  l'ensemble des longueurs d'équerres principales généralisées de  $\lambda$ .

On sait par [28, Lemme 2.1] que si on adjoint  $\{-1, -2, \dots, -t+1\}$  à l'ensemble des longueurs d'équerres de la première colonne d'un  $t$ -core, le résultat est un ensemble  $t$ -compact. Par conséquent,  $H'' := H' \cup \{-1, -2, \dots, -2t+1\}$  est un ensemble

$2t$ -compact. Pour montrer l'égalité, il faut et il suffit de montrer que  $H$  et  $H''$  ont les mêmes ensembles d'éléments maximaux. Pour cela, on va montrer que les éléments  $x$  de  $E$  sont les éléments maximaux de  $H''$ .

Pour l'élément  $x := h_{1,1} - 2t$  de  $E$ , trois cas peuvent se produire suivant la valeur de  $h_{1,1}$ .

Ou bien  $h_{1,1} > 4t$ , dans ce cas, par la Remarque 3.29,  $h_{1,1} - 4t$  est aussi une longueur d'équerre principale, et donc  $(h_{1,1} + h_{1,1} - 4t)/2 = h_{1,1} - 2t$  appartient à  $H'$ . Cet élément est de plus maximal dans sa classe de congruence modulo  $2t$  dans  $H'$ , car  $h_{1,1}$  n'appartient pas à  $H'$ .

Ou bien  $4t > h_{1,1} > 2t$ , dans ce cas, par la Remarque 3.29,  $4t - h_{1,1}$  n'appartient pas à  $\Delta$ . Comme  $4t - h_{1,1}$  est inférieur à  $h_{1,1}$ , par le Lemme 3.26,  $h_{1,1} - 4t$  appartient à  $\Delta^g$ , et donc  $(h_{1,1} + h_{1,1} - 4t)/2 = h_{1,1} - 2t$  appartient à  $H'$  (et est maximal dans sa classe de congruence par le même argument).

Ou bien  $2t > h_{1,1} > 0$  et dans ce cas,  $h_{1,1} - 2t$  est strictement compris entre 0 et  $-2t$  et appartient à  $H''$ .

Pour les éléments  $(h_{1,1} + \Delta_j)/2$  et  $(h_{1,1} - \Delta_j - 4t)/2$ , deux cas sont possibles suivant le signe de  $\Delta_j$ .

Si  $\Delta_j > 0$ , alors en particulier,  $\Delta_j < h_{1,1}$ . On a donc  $\Delta_j \in \Delta$ , et  $(h_{1,1} + \Delta_j)/2$  est un élément de  $H'$ . Cet élément est maximal dans sa classe de congruence modulo  $2t$  dans  $H'$ . En effet, si on suppose que  $(h_{1,1} + \Delta_j)/2 + 2t$  est un élément de  $H'$ , alors on en déduit que  $\Delta_j + 4t \in \Delta$ , ce qui contredit la maximalité de  $\Delta_j$ .

Pour  $(h_{1,1} - \Delta_j - 4t)/2$ , il nous faut à nouveau distinguer deux cas.

Ou bien  $\Delta_j + 4t > h_{1,1}$ , dans ce cas  $-(\Delta_j + 4t)$  appartient à  $\Delta^g$  d'après la maximalité de  $\Delta_j$  et le Lemme 3.26, et donc  $(h_{1,1} - \Delta_j - 4t)/2$  appartient à  $H'$ .

Ou bien  $\Delta_j + 4t < h_{1,1}$ , dans ce cas on a l'encadrement  $-2t < (h_{1,1} - \Delta_j - 4t)/2 < 0$  et donc  $(h_{1,1} - \Delta_j - 4t)/2$  appartient à  $H''$ .

Le fait que ces éléments soient maximaux dans leurs classes de congruences dans  $H''$  se prouve de la même manière que dans ce qui précède.

Si  $\Delta_j < 0$ , les mêmes arguments (en faisant attention au cas où  $\Delta_j$  n'appartient pas à  $\Delta^g$  car  $h_{1,1}$  est plus petit que  $\Delta_j$  en valeur absolue) permettent de montrer que les deux éléments  $(h_{1,1} + \Delta_j)/2$  et  $(h_{1,1} - \Delta_j - 4t)/2$  appartiennent à  $H''$ . Leurs maximalités se prouvent d'une des deux manières utilisées ci-dessus. □

LEMME 3.32. *Soient  $\lambda$  un  $(2t)$ -core auto-conjugué et  $(n_1, \dots, n_t) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $\lambda = \phi_1(\mathbf{n})$ . L'égalité suivante est vérifiée :*

$$(54) \quad \prod_{i < j} ((4tn_i + 2i - 1)^2 - (4tn_j + 2j - 1)^2) = \frac{\delta_\lambda}{c_2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 - \frac{2t}{h \varepsilon_h} \right),$$

où on rappelle que le produit dans le membre de gauche porte sur les couples d'entiers ordonnés  $i < j$  tels que  $i$  et  $j$  soient compris entre 1 et  $t$ .

DÉMONSTRATION. La preuve est très similaire à celle du Lemme 3.16. C'est à cette étape de la preuve du Théorème 3.24 que nous faisons une récurrence sur le nombre d'équerres principales de la partition  $\lambda$ , en supprimant à chaque pas de la récurrence l'équerre principale de plus grande longueur. Contrairement à ce qui se passe dans le Lemme 3.16, il n'y a ici qu'une seule possibilité : on supprime toujours l'équerre issue de la case  $(1, 1)$  de  $\lambda$ . Nous notons ici  $P$  le membre gauche de (54),

et nous utilisons la bijection  $\phi_1$  pour transformer  $P$  en un produit qui implique les nombres  $\Delta_i$ , de la même manière que lorsque nous avons établi (49) :

$$(55) \quad P = \prod_{i < j} ((2t + \Delta_i)^2 - (2t + \Delta_j)^2).$$

En utilisant les mêmes notations que celles précédant le Lemme 3.30, on définit

$$(56) \quad P' := \prod_{i < j} ((2t + \Delta'_i)^2 - (2t + \Delta'_j)^2).$$

Le Lemme 3.30 nous assure alors que

$$(57) \quad P = \frac{h_{1,1} - 2t}{h_{1,1}} \frac{h_{1,1}}{h_{1,1} - 2t} \prod_{j \neq i_0} \left( \frac{h_{1,1} - \Delta_j}{h_{1,1} - \Delta_j - 4t} \frac{h_{1,1} + \Delta_j + 4t}{h_{1,1} + \Delta_j} \right) \times P'.$$

Maintenant, le Lemme 3.31 montre que l'ensemble  $E$  défini dans (53) est le  $\max_{2t}(H)$  de l'ensemble  $H$  dont les éléments positifs sont exactement les longueurs d'équerres des cases de la première colonne de  $\lambda$ , à l'exception de  $h_{1,1}$ . On applique alors le Lemme 3.13 pour montrer que

$$(58) \quad \frac{h_{1,1} - 2t}{h_{1,1}} \frac{h_{1,1}}{h_{1,1} - 2t} \prod_{j \neq i_0} \frac{h_{1,1} - \Delta_j}{h_{1,1} - \Delta_j - 4t} \frac{h_{1,1} + \Delta_j + 4t}{h_{1,1} + \Delta_j} = - \frac{h_{1,1} - 2t}{h_{1,1}} \prod_h \left( 1 - \frac{2t}{h^2} \right),$$

où le produit à droite porte sur les longueurs d'équerres de la première colonne de  $\lambda$ , à l'exception de  $h_{1,1}$ . Le membre droit se réécrit aisément à l'aide d'une identité remarquable sous la forme :

$$(59) \quad - \prod_h \left( 1 - \frac{2t}{h \varepsilon_h} \right),$$

où le produit porte cette fois sur les longueurs d'équerres de toutes les cases de l'équerre principale issue de  $(1, 1)$ .

On a donc montré que

$$(60) \quad P = - \prod_h \left( 1 - \frac{2t}{h \varepsilon_h} \right) \times P',$$

avec les mêmes conditions que précédemment pour le produit.

Le résultat voulu s'ensuit alors immédiatement en effectuant la récurrence annoncée au début de la preuve, après avoir remarqué qu'il y aura exactement  $D(\lambda)$  étapes dans la récurrence, que chacune des étapes donne lieu à l'apparition d'un signe  $-$ , ce qui explique le terme  $\delta_\lambda$ , et que le cas de base correspond à une partition  $\lambda$  vide. Dans ce cas,  $\Delta_i = i - 2t$  pour tout  $i$  impair tel que  $1 \leq i \leq 2t - 1$ , et donc

$$(61) \quad \prod_{i < j} ((2t + \Delta'_i)^2 - (2t + \Delta'_j)^2) = \prod_{i < j} (i^2 - j^2) = \frac{1}{c_2}.$$

□

Nous pouvons désormais montrer le Théorème 3.24.



PREUVE DU THÉORÈME 3.24. En appliquant la bijection  $\phi_1$  à l'identité de Macdonald (41) en type  $\widetilde{C}_t$ , et en utilisant le Lemme 3.32, on montre que pour tout entier  $t \geq 2$  :

$$(62) \quad \left( \prod_{i \geq 1} \frac{(1 - x^{2i})^{t+1}}{1 - x^i} \right)^{2t-1} = \sum_{\lambda \in SC_{(2t)}} \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 - \frac{2t}{h \varepsilon_h} \right).$$

Si une partition  $\lambda$  est auto-conjuguée, alors le multi-ensemble de ses longueurs d'équerres de cases situées strictement en dessous de la diagonale principale est le même que celui des longueurs d'équerres de cases situées strictement au dessus de la diagonale principale. Il s'ensuit que le produit  $\prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 - \frac{2t}{h \varepsilon_h} \right)$  s'annule si  $\lambda$  est une partition auto-conjuguée qui n'est pas un  $(2t)$ -core. La formule (62) est donc valable pour tout entier  $t \geq 2$  si la somme porte sur toutes les partitions auto-conjuguées.

Enfin, le même argument de polynômialité que celui employé dans la preuve du Théorème 3.17 permet de conclure.  $\square$

**4.4. Quelques applications et généralisations aux autres types.** On donne ici quelques applications du Théorème 3.24. Premièrement, en posant  $z = -1$ , nous obtenons une nouvelle expression pour le triple produit de Jacobi, ce qui était d'ailleurs demandé par Han dans [26] :

$$(63) \quad \prod_{i \geq 1} (1 - x^i)^3 = \sum_{\lambda \in SC} \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( 1 + \frac{2}{h \varepsilon_h} \right).$$

Deuxièmement, à l'instar du Théorème 3.20, le théorème suivant fait un lien entre les formules de Macdonald dans différents types.

THÉORÈME 3.33. *Les familles suivantes de formules sont toutes généralisées par le Théorème 3.24 :*

- (i) *les formules de Macdonald (41) en type  $\widetilde{C}_t$  pour  $t \geq 2$  ;*
- (ii) *les formules de Macdonald en type  $\widetilde{BC}_t$  pour  $t \geq 1$  :*

$$(64) \quad (\eta(x^{1/2})^{-2} \eta(x)^{2t+3})^t = c_2 \sum_{\mathbf{v}} (-1)^{\sum (v_i-1)/2} x^{\|\mathbf{v}\|^2/(4t+2)} \prod_{i < j} (v_i^2 - v_j^2),$$

*où la somme porte sur les  $t$ -uplets  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $v_i \equiv 2i - 1 \pmod{4t+2}$  ;*

- (iii) *les formules de Macdonald en type  $\widetilde{B}_t$  pour  $t \geq 3$  :*

$$(65) \quad (\eta(x^{1/2})^2 \eta(x)^{2t-3})^z = c_2 \sum_{\mathbf{v}} (-1)^{\sum v_i} x^{\|\mathbf{v}\|^2/(4t-2)} \prod_{i < j} (v_i^2 - v_j^2)$$

*où la somme porte sur les  $t$ -uplets  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{Z}^t$  tels que  $v_i \equiv 2i - 1 \pmod{4t-2}$  et  $v_1 + \dots + v_t \equiv t^2 \pmod{8t-4}$ .*

DÉMONSTRATION. De la même manière que pour le Théorème 3.20, on ne détaillera pas ici les calculs, on indiquera seulement comment les formules de Macdonald (64) et (65) sont obtenues à partir de (42).

Pour obtenir (64), il faut poser  $2t := 2v - 1$  dans (42), et donc considérer en fait les partitions auto-conjuguées qui sont des  $(2v - 1)$ -cores. Ces partitions sont alors

en bijection avec les vecteurs présents dans la formule de Macdonald (64), que l'on retrouve après avoir fait le changement de variable  $x \rightarrow x^{1/2}$ .

Pour obtenir (65), il faut poser  $-2t := 2v - 1$  dans (42), et donc considérer les partitions auto-conjuguées qui ne peuvent avoir  $2v - 1$  comme longueur d'équerre que sur leur diagonale principale. On retrouve alors la formule (65) après avoir utilisé une bijection et effectué le changement de variable  $x \rightarrow x^{1/2}$ .  $\square$

### 5. Quelques remarques et questions pour conclure...

Lors de la présentation d'une partie de ces travaux à la conférence FPSAC 2015 à Daejeon en Corée du Sud, un dialogue fructueux s'est établi avec Ronald King et Bruce Westbury. Suite à celui-ci, il apparaît que les Théorèmes 3.1 et 3.24, ainsi que la formule de Nekrasov-Okounkov (9) peuvent être prouvés de manière purement algébrique, à l'aide d'un résultat de King et d'un résultat de El Samra-King. (Notons par ailleurs que la formule de Nekrasov-Okounkov (9) est présente dans l'article [85, Proposition 6.2] de Westbury, là encore la preuve est algébrique et utilise les polynômes d'Arcais.) Nous esquissons rapidement le cheminement dans le cas du type  $\tilde{C}$ . En utilisant une règle de modification pour les caractères des algèbres de Lie, King a prouvé l'équation suivante dans [39, Équation (5.8b)] :

$$(66) \quad C_{q^k}(x)_N := \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} (1 - q^k x_i x_j) = \sum_{\gamma \in DD} (-q)^{|\gamma|/2} \langle \gamma \rangle (x)_N,$$

où  $N$  est un entier positif et  $\langle \gamma \rangle (x)_N$  est le caractère formel irréductible de  $Sp(N)$  associé à la partition  $\gamma$ . En spécialisant les variables  $x_i$  en 1 via un passage à la limite [40], on obtient alors :

$$(67) \quad \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{N(N+1)/2} = \sum_{\gamma \in DD} (-q)^{|\gamma|/2} D_N \langle \gamma \rangle,$$

où  $D_N \langle \gamma \rangle$  est la dimension formelle de la représentation irréductible de  $Sp(N)$  indexée par  $\gamma$ . Ces dimensions ont été calculées dans [18, Équation 3.29], ce qui permet donc après quelques calculs détaillés dans [40] de retrouver le Théorème 3.1. Cependant, retrouver les vecteurs de  $\mathbb{Z}^t$  des formules de Macdonald via un processus algébrique s'avère, d'après King lui-même, quelque peu délicat<sup>1</sup> (car les vecteurs dans les identités de Macdonald ne se trouvent pas dans une chambre fondamentale de Weyl). Notre approche fournit donc, outre les Théorèmes 3.1 et 3.24, la combinatoire qui explique ce phénomène.

Une question naturelle qui s'impose, et à laquelle nous ne sommes pas capables à l'heure actuelle d'apporter une réponse, est de savoir si on peut prouver de manière combinatoire, à partir des identités de Macdonald, tout ou partie des équations (5.8a) à (5.8j) de King [39] spécialisées en  $x_i = 1$ . Un cas particulier de ce problème, l'équation (5.8a), correspond au type  $\tilde{D}$ , et fournirait ainsi une interprétation combinatoire des formules de caractère dans ce type.

1. en anglais, "quite tricky" dans [40]



## CHAPITRE 4

### Extensions via la décomposition de Littlewood

*Moi, quand on m'en fait trop j'corrèctionne plus, j'dynamite, j'disperse, j'ventile.*

---

Les tontons flingueurs, Raoul Volfoni (1963)

#### 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux généralisations que l'on peut obtenir en raffinant les Théorèmes 3.1 et 3.24, en ajoutant de nouveaux paramètres, comme l'a fait Han pour (9). Nous pouvons montrer le résultat suivant, en utilisant la correspondance canonique entre les partitions d'entiers et les mots binaires bi-infinis commençant par une infinité de 0 et se terminant par une infinité de 1, ainsi que la décomposition classique de Littlewood (voir par exemple [74, p. 468]) et de nouvelles propriétés de celle-ci. Plus précisément, nous utilisons le fait remarquable (spécifique aux partitions auto-conjuguées ou à parts distinctes doublées), que les statistiques  $h\varepsilon_h$  et  $\delta_\lambda$  de telles partitions  $\lambda$  peuvent être exprimées en termes de l'image de  $\lambda$  par la décomposition de Littlewood.

**THÉORÈME 4.1.** *Soient  $t = 2t' + 1$  un entier positif impair, et  $y$  et  $z$  deux nombres complexes. Avec les notations et les définitions du chapitre précédent, l'égalité suivante est vérifiée :*

$$(68) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yt(2z+2)}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)(1 - x^{kt})^{t'-1} (1 - x^{kt}y^{2k})^{(2z+1)(zt+3(t-1)/2)}.$$

Nous en déduisons dans la suite plusieurs spécialisations de (68), telles que nombre de séries génératrices avec poids pour les partitions à parts distinctes doublées, et la généralisation suivante de la formule des équerres symplectiques (13), valable pour tout entier positif  $n$  et tout entier positif impair  $t$  :

$$(69) \quad \sum_{\substack{\lambda \in DD, \ |\lambda|=2tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} = \frac{(-1)^n}{n! t^n 2^n}.$$

Notons que ce n'est pas tout à fait trivial de voir que (13) est une conséquence de (69) ; les détails sont donnés dans le paragraphe 3.1. Nous faisons ensuite le même genre de travail pour le Théorème 3.24 et les partitions auto-conjuguées.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, nous rappelons tout d'abord les propriétés classiques de la décomposition de Littlewood, puis nous en établissons de nouvelles concernant l'action de cette décomposition sur les deux

statistiques  $\varepsilon_h$  et  $\delta_\lambda$ , à la fois pour les partitions à parts distinctes doublées et auto-conjuguées. Dans la section 3, nous montrons deux généralisations du Théorème 3.1 et deux généralisations du Théorème 3.24, en utilisant les propriétés de la décomposition de Littlewood vues à la section 2.

Faisons une dernière remarque sur ce chapitre : comme les méthodes employées pour montrer ces quatre généralisations sont similaires, beaucoup de preuves se ressemblent. Nous avons pris le parti de systématiquement donner les détails des preuves calculatoires pour éviter que le lecteur n'ait trop de calcul à faire pour vérifier les résultats. En revanche, sur les preuves plus conceptuelles (nous pensons notamment aux Lemmes 4.3, 4.5, et 4.7 ici), nous avons décidé de donner moins de détails, car les arguments sont identiques.

## 2. De nouvelles propriétés de la décomposition de Littlewood

Dans cette section, nous démontrons deux généralisations du Théorème 3.1 avec deux nouveaux paramètres, en utilisant d'une part la correspondance canonique entre les partitions et certains mots binaires bi-infinis, et d'autre part de nouvelles propriétés de la *décomposition de Littlewood*, que nous commençons par rappeler dans le prochain paragraphe.

**2.1. La décomposition de Littlewood.** Nous suivons [28] dans ce paragraphe. Avec  $t$  un entier strictement positif fixé, la décomposition de Littlewood est une bijection classique qui envoie chaque partition sur un vecteur de  $t$  partitions composé de son  $t$ -core et de son  $t$ -quotient (on pourra aussi se référer à [74, p. 468]). Pour pouvoir décrire en détail cette décomposition de Littlewood, nous devons introduire la représentation des partitions en termes de séquence binaire bi-infinie.

Soit  $\mathcal{W}$  l'ensemble des suites (ou mots) binaires bi-infinies commençant par une infinité de 0 et terminant par une infinité de 1. Chaque élément  $w$  de  $\mathcal{W}$  peut être représenté par une suite  $(b_i)_i = \cdots b_{-2}b_{-1}b_0b_1b_2\cdots$ , mais cette représentation n'est pas unique. En effet, pour chaque entier relatif  $k$  fixé, la suite  $(b_{i+k})_i$  est aussi une représentation de  $w$ . La *représentation canonique* de  $w$  est la seule suite  $(c_i)_i = \cdots c_{-2}c_{-1}c_0c_1c_2\cdots$  telle que :

$$\#\{i \leq -1, c_i = 1\} = \#\{i \geq 0, c_i = 0\}.$$

Nous plaçons un symbole “.” entre les lettres  $c_{-1}$  et  $c_0$  dans la suite bi-infinie  $(c_i)_i$  quand il s'agit de la représentation canonique. Il y a une correspondance naturelle entre l'ensemble  $\mathcal{P}$  des partitions et  $\mathcal{W}$ . Soit  $\lambda$  une partition. Nous encodons chaque arête horizontale du bord du diagramme de Ferrers de  $\lambda$  par 1 et chaque arête verticale par 0. Lire cet encodage binaire du diagramme de Ferrers de haut en bas et de gauche à droite donne un mot binaire  $u$ . En ajoutant une infinité de 0 à gauche et une infinité de 1 à droite de  $u$ , on obtient un élément  $w = \cdots 000u111\cdots \in \mathcal{W}$ . La fonction

$$(70) \quad \psi : \lambda \mapsto w$$

est une correspondance bijective entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{W}$ . La représentation canonique de  $\psi(\lambda)$  sera notée  $C_\lambda$ .

Par exemple (voir la Figure 2.1), pour  $\lambda = (4, 2, 1, 1)$ , on a  $u = 10010110$ , donc  $w = \cdots 00010010110111\cdots$  et  $C_\lambda = \cdots 0001001.0110111\cdots$ .

Remarquons que le symbole “.” dans la représentation canonique de  $\lambda$  correspond dans le diagramme de Ferrers au coin nord-est du carré de Durfee. La taille

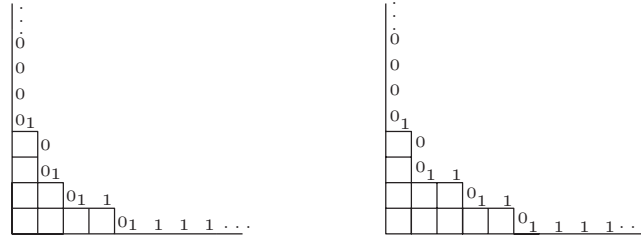


FIGURE 2.1. Une partition auto-conjuguée et une partition à parts distinctes doublées et leurs encodages binaires respectifs. Notons qu'ici on a considéré que l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées faisaient aussi partie du diagramme de Ferrers, l'étape où on ajoute des 0 et des 1 au mot  $u$  n'est alors pas nécessaire.

du carré de Durfee est le nombre de 1 se trouvant avant le symbole “.” dans la représentation canonique. La définition suivante est utile pour interpréter les partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées en termes de mots binaires bi-infinis.

DÉFINITION 4.2. Soit  $v$  un mot binaire fini. Le *mot miroir* de  $v$  est le mot obtenu en lisant les lettres de  $v$  de la droite vers la gauche. On définit  $f(v)$  comme le mot miroir de  $v$  dans lequel on échange les lettres 0 et 1.

Par exemple, si  $v = 1001010$ , alors  $f(v) = 1010110$ .

Remarquons aussi que  $\lambda$  est une partition à parts distinctes doublées si et seulement si sa représentation canonique est de la forme  $\cdots 00v.1f(v)11\cdots$ , où  $v$  est un mot fini. Remarquons enfin que  $\lambda$  est auto-conjuguée si et seulement si sa représentation canonique est de la forme  $\cdots 00v.f(v)11\cdots$ .

Soit  $t$  un entier strictement positif. La susmentionnée *décomposition de Littlewood* est une bijection classique, notée  $\Omega$ , qui envoie une partition  $\lambda$  sur un vecteur de  $t + 1$  partitions  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  telles que :

- (i)  $\tilde{\lambda}$  soit le  $t$ -core de  $\lambda$  et  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$  sont des partitions ;
- (ii)  $|\lambda| = |\tilde{\lambda}| + t(|\lambda^0| + |\lambda^1| + \cdots + |\lambda^{t-1}|)$  ;
- (iii)  $\{h/t, h \in \mathcal{H}_t(\lambda)\} = \mathcal{H}(\lambda^0) \cup \mathcal{H}(\lambda^1) \cup \cdots \cup \mathcal{H}(\lambda^{t-1})$ , où cette égalité doit être interprétée en termes de multi-ensembles. En outre, il y a une correspondance bijective explicite entre les cases de  $\lambda$  dont les longueurs d'équerres sont des multiples entiers de  $t$  et les cases de  $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}$ .

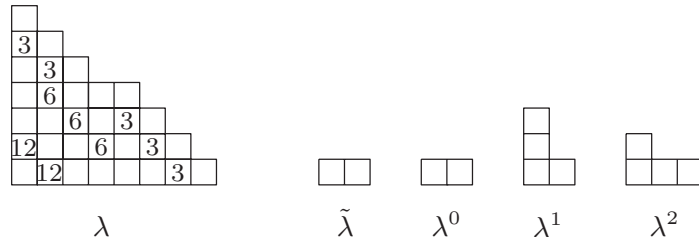


FIGURE 2.2. La décomposition de Littlewood de  $\lambda = (8, 7, 6, 5, 3, 2, 1)$  pour  $t = 3$ . Dans le diagramme de Ferrers de  $\lambda$ , nous écrivons seulement les longueurs d'équerres qui sont des multiples entiers de 3.

Le vecteur composé des partitions  $(\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  est habituellement appelé le  $t$ -quotient de  $\lambda$ .

Nous allons maintenant décrire précisément la bijection  $\Omega$ . Nous divisons la représentation canonique  $C_\lambda = (c_i)_i$  en  $t$  sections, *i.e.* nous formons les sous-suites  $v^k = (c_{it+k})_i$  pour chaque entier  $k \in \{0, \dots, t-1\}$ . La partition  $\lambda^k$  est alors définie comme étant  $\psi^{-1}(v^k)$ . Notons cependant que  $v^k$  n'est pas nécessairement la représentation canonique de  $\lambda^k$ . La partition  $\tilde{\lambda}$  peut être définie de manière équivalente des deux façons suivantes : ou bien comme étant le  $t$ -core de  $\lambda$  (voir Définition 2.4), ou bien comme suit en termes de mots. Pour chaque sous-suite  $v^k$ , on remplace continuellement 10 par 01, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus effectuer de remplacement. La sous-suite ainsi obtenue est de la forme  $\dots 000111\dots$ , est notée  $w^k$ , et ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a effectué les remplacements. Le  $t$ -core de la partition  $\lambda$  est alors la partition  $\tilde{\lambda}$  telle que les  $t$  sections de sa représentation canonique  $C_{\tilde{\lambda}}$  soient exactement  $w^0, w^1, \dots, w^{t-1}$ . Les propriétés (ii) et (iii) de la décomposition de Littlewood peuvent alors être déduites du fait suivant : chaque case de  $\lambda$  est en correspondance bijective avec les paires ordonnées d'entiers  $(i, j)$  telles que  $i < j$ ,  $c_i = 1$  et  $c_j = 0$ . En outre, la longueur d'équerre de cette case est  $j - i$ .

**2.2. Cas des partitions à parts distinctes doublées.** Soit  $t$  un entier strictement positif. Il est déjà connu (voir [24]) que la restriction de  $\Omega$  à l'ensemble des partitions à parts distinctes doublées est une bijection avec l'ensemble des vecteurs  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}) \in DD_{(t)} \times DD \times \mathcal{P}^{t-1}$  tels que  $\lambda^{t-i} = \lambda^{i*}$  pour  $1 \leq i \leq t-1$  (où on rappelle que  $\lambda^{i*}$  est la partition conjuguée de  $\lambda^i$ ).

Cette propriété peut être vérifiée sur la Figure 2.2, pour  $\lambda = (8, 7, 6, 5, 3, 2, 1) \in DD$  et  $t = 3$ .

Pour montrer nos généralisations du Théorème 3.1, nous allons cependant avoir besoin de nouvelles propriétés de la décomposition de Littlewood pour les partitions à parts distinctes doublées, notamment sur le comportement des statistiques  $\delta_\lambda$  et  $\varepsilon_h$  vis à vis de cette décomposition.

**LEMME 4.3.** *Soient  $t = 2t' + 1$  un entier positif impair et  $\lambda$  une partition à parts distinctes doublées ; nous notons  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  son image par  $\Omega$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0}$ .
- (ii) *Soit  $v$  une case de  $\lambda^0$  et soit  $V$  la case de  $\lambda$  qui est canoniquement associée à  $v$ . La case  $v$  est strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda^0$  si et seulement si  $V$  est strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda$ .*
- (iii) *Soit  $v = (j, k)$  une case de  $\lambda^i$ , avec  $1 \leq i \leq t'$ . Notons  $v^* = (k, j)$  la case de  $\lambda^{2t'+1-i} = \lambda^{i*}$ ,  $V$  et  $V^*$  les cases de  $\lambda$  qui sont canoniquement associées à  $v$  et  $v^*$ . Si  $V$  est strictement au dessus (respectivement en dessous) de la diagonale principale de  $\lambda^i$ , alors  $V^*$  est strictement en dessous (respectivement au dessus) de la diagonale principale de  $\lambda$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\lambda$  à parts distinctes doublées, et soit  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  son image par  $\Omega$ . Fixons  $\tilde{v} := \psi(\tilde{\lambda})$ , et  $v^i := \psi(\lambda^i)$  pour  $0 \leq i \leq t-1$ . (On rappelle que  $\psi$  est définie dans (70).)

On prouve (i) par récurrence sur le nombre de cases de la diagonale principale de  $\lambda$ . La propriété est vraie si  $\lambda$  est vide. Si  $\lambda$  est non vide, on note  $\lambda'$  la partition à parts distinctes doublées obtenue en enlevant l'équerre principale de plus grande longueur dans  $\lambda$  (c'est-à-dire l'équerre issue de la case  $(1, 1)$ ). Fixons  $\Omega(\lambda') := (\tilde{\lambda}', \lambda'^0, \lambda'^1, \dots, \lambda'^{t-1})$ ,  $\tilde{v}' := \psi(\tilde{\lambda}')$ , et  $v'^i := \psi(\lambda'^i)$  pour  $0 \leq i \leq t-1$ .

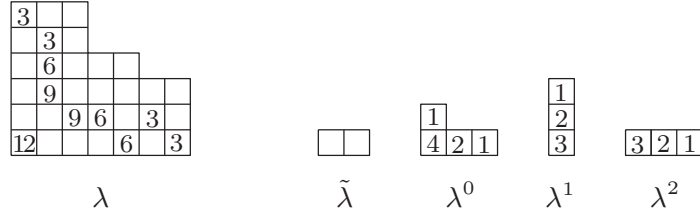


FIGURE 2.3. Le Lemme 4.3 illustré pour  $\lambda = (7, 7, 7, 5, 3, 3)$  et  $t = 3$ . La case de longueur d'équerre 12 dans  $\lambda$  correspond à la case de longueur d'équerre 4 dans  $\lambda^0$ . Les cases de longueurs d'équerres 9 dans  $\lambda$  correspondent aux cases de longueur d'équerre 3 dans  $\lambda^1$  et  $\lambda^2$ .

D'après l'hypothèse de récurrence, on a  $\delta_{\lambda'} = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda'^0}$ . Supprimer la plus grande des équerres principales de  $\lambda$  correspond en termes de mots, à remplacer le premier 1 de  $\psi(\lambda)$  par un 0, et le dernier 0 de  $\psi(\lambda)$  par un 1. Deux cas peuvent alors arriver.

**Cas 1 :** Le premier 1 dans  $\psi(\lambda)$  appartient à  $v^0$  (voir l'exemple dans la Figure 2.4 ci-dessous). Dans ce cas, il y a exactement  $kt - 1$  lettres entre ce 1 et le symbole ".", et comme  $\lambda$  est une partition à parts distinctes doublées, il y a  $kt$  lettres entre le symbole "." et la dernière lettre 0. Donc le dernier 0 appartient aussi à  $v^0$ . Parmi les mots  $v^i$ , changer ce premier 1 en 0 et le dernier 0 en un 1 ne change donc que  $v^0$ , et supprime donc aussi la plus grande équerre principale de  $\lambda^0$ . Le  $t$ -core  $\tilde{\lambda}$  n'est pas non plus modifié. Donc  $\lambda'^0$  est égal à la partition  $\lambda^0$  dans laquelle on a supprimé la plus grande équerre principale, et on a :

$$\delta_{\lambda} = -\delta_{\lambda'} = -\delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda'^0} = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0}.$$

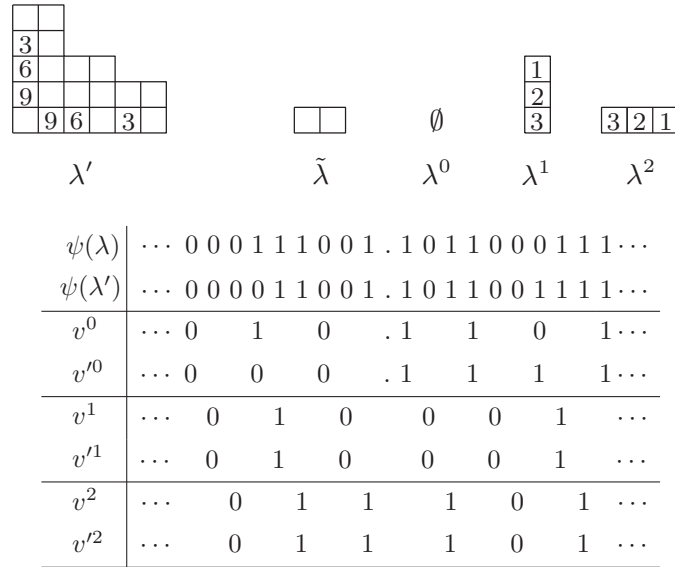


FIGURE 2.4. Illustration de la preuve (i) cas 1, pour  $\lambda = (6, 6, 4, 2, 2)$  et  $t = 3$ .

**Cas 2 :** Le premier 1 dans  $\psi(\lambda)$  appartient à un mot  $v^i$  (avec  $1 \leq i \leq t$ ); le dernier 0 dans  $\psi(\lambda)$  appartient alors au mot  $v^{t-i}$  car  $\lambda$  est une partition à parts distinctes doublées. Changer le premier 1 en un 0 supprime la première colonne dans  $\lambda^i$  et changer le dernier 0 en un 1 supprime la première ligne dans  $\lambda^{t-i}$ . La partition  $\lambda^0$  n'est pas modifiée, donc  $\delta_{\lambda^0} = \delta_{\lambda'^0}$ . Nous allons maintenant prouver que la parité



de la taille du carré de Durfee de  $\tilde{\lambda}$  est différente de la parité de la taille de celui de  $\tilde{\lambda}'$ . En remplaçant continuellement le sous-mot 10 par 01 dans  $v^i$  (respectivement  $v^{t-i}$ ), on obtient un sous-mot de la forme  $\cdots 000111 \cdots$ , où le dernier 0 est en position  $k_1$  (respectivement  $k_2$ ), où  $k_1$  et  $k_2$  sont des entiers.

En remplaçant continuellement le sous mot 10 par 01 dans  $v^i$  (respectivement  $v^{t-i}$ ), on obtient aussi un sous-mot de la forme  $\cdots 000111 \cdots$ , mais ici le dernier 0 est en position  $k_1 + 1$  (respectivement  $k_2 - 1$ ). Selon les distances respectives de  $k_1$  et  $k_2$  par rapport au symbole “.” dans  $\tilde{v}$ , la taille du carré de Durfee de  $\tilde{\lambda}'$  augmente ou diminue de 1 par rapport à celle du carré de Durfee de  $\tilde{\lambda}$ . Ainsi,  $\delta_{\lambda} = -\delta_{\tilde{\lambda}}\delta_{\lambda^0} = \delta_{\tilde{\lambda}}\delta_{\lambda^0}$ .

Nous prouvons maintenant (ii). Soient  $v = (j, k)$  une case de  $\lambda^0$  et  $V$  sa case cano-  
niquement associée dans  $\lambda$ . Si  $\lambda^0$  est vide, la propriété est triviale. Sinon, comme  $\lambda^0$   
est une partition à parts distinctes doublées, on peut écrire  $v^0 = \cdots 00w.1f(w)11 \cdots$ ,  
où  $w$  est un mot commençant par 1 (rappelons que  $f$  est décrite dans la Définition 4.2).  
Supposons que  $v$  est strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda^0$  et est dans son  
carré de Durfee (les autres cas se traitent de manière identique). En utilisant la correspon-  
dance bijective entre les cases et les couples d'entiers, on peut décomposer le mot  $w$  de la  
manière suivante :  $w = w_11w_2$  où il y a exactement  $k - 1$  occurrences de 1 dans  $w_1$ .  
On peut aussi décomposer  $f(w)$  de la manière suivante :  $f(w) = w_30w_4$ , où il y a  
exactement  $j - 1$  occurrences de 0 dans  $w_4$ . Comme  $\lambda^0$  est une partition à parts  
distinctes doublées et que  $j > k$ ,  $f(w_1)$  est un suffixe de  $w_4$ . Cette situation se  
transmet alors à  $\psi(\lambda)$  : on peut écrire  $\psi(\lambda) = \cdots 00u_11u_2.1u_30u_411 \cdots$ ,  
où le couple composé du premier 1 après  $u_1$  et du premier 0 après  $u_3$  correspond à la  
case  $V$ . Le mot  $f(u_1)$  étant un suffixe de  $u_4$ ,  $u_1$  contient strictement moins d'oc-  
currences de 1 qu'il n'y a d'occurrences de 0 dans  $u_4$ , et donc la case  $V$  est strictement  
au dessus de la diagonale principale de  $\lambda$ .

La preuve de (iii) va utiliser le même genre d'arguments que celle de (ii) ; elle  
est cependant un peu plus compliquée car il y a plus de cas et de sous-mots qui  
apparaissent.

Notons tout d'abord que pour une raison de parité, les cases  $V$  et  $V^*$  ne peuvent  
pas appartenir à la diagonale principale de  $\lambda$ . Supposons sans perte de généralité  
que  $k < j$  (et donc que  $v$  est strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda^i$ ).  
On peut écrire

$$v^i = \cdots 00w_11w_20w_311 \cdots ,$$

où  $w_1$  commence par un 1,  $w_3$  finit par un 0, et il y a  $k - 1$  occurrences de 1 dans  $w_1$   
et  $j - 1$  occurrences de 0 dans  $w_3$  (où le couple formé du 1 avant  $w_2$  et du 0 après  
 $w_2$  correspond à la case  $v$ ). Comme  $\lambda^{2t'+1-i} = \lambda^{i*}$ , on peut écrire

$$v^{t-i} = f(v^i) = \cdots 00u_11u_20u_311 \cdots ,$$

où  $u_1$  commence par 1,  $u_3$  se termine par 0, et il y a  $j - 1$  occurrences de 1 dans  $u_1$   
et  $k - 1$  occurrences de 0 dans  $u_3$ . Ici, le couple formé du 1 avant  $u_2$  et du 0 après  
 $u_2$  correspond à la case  $v^*$ . Ces informations nous permettent de décrire  $\psi(\lambda)$  de la  
manière suivante :

$$\psi(\lambda) = \cdots 00x_11x_21x_30x_40x_511 \cdots ,$$

où le 1 après  $x_1$  provient de la  $k^{\text{ième}}$  occurrence de 1 dans  $v^i$ , le 1 après  $x_2$  provient  
de la  $i^{\text{ième}}$  occurrence de 1 dans  $v^{t-i}$ , le 0 après  $x_3$  provient de la  $i^{\text{ième}}$  occurrence  
de 0 en lisant  $v^i$  de la droite vers la gauche et le 0 après  $x_4$  provient de la  $k^{\text{ième}}$

occurrence de 0 en lisant  $v^{t-i}$  de la droite vers la gauche. La case  $V$  correspond au couple composé du 1 situé après  $x_1$  et du 0 situé après  $x_3$ . En conséquence, il y a au moins une occurrence de plus de 0 dans  $x_4 0 x_5$  que le nombre d'occurrences de 1 dans  $x_1$ , donc la case  $V$  est strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda$ . La case  $V^*$  correspond au couple composé du 1 après  $x_2$  et du 0 après  $x_4$ , donc  $V^*$  est strictement en dessous de la diagonale principale de  $\lambda$ .  $\square$

La propriété (i) du lemme précédent nous permet de calculer la série génératrice signée suivante des  $t$ -cores à parts distinctes doublées, qui est étonnamment beaucoup plus simple que la série génératrice non signée qui a été donnée dans la preuve de la Proposition 3.6 (ou aussi dans [24]).

LEMME 4.4. *Soit  $t = 2t' + 1$  un entier positif impair. L'égalité suivante est vérifiée :*

$$(71) \quad \sum_{\tilde{\lambda} \in DD(t)} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} = \prod_{k \geq 1} (1 - x^k) (1 - x^{kt})^{t'-1}.$$

DÉMONSTRATION. On peut utiliser la décomposition de Littlewood des partitions à parts distinctes doublées et le Lemme 4.3 (i) pour obtenir :

$$(72) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} = \sum_{\tilde{\lambda} \in DD(t)} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} \times \sum_{\lambda^0 \in DD} \delta_{\lambda^0} x^{t|\lambda^0|/2} \times \left( \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{t|\lambda|} \right)^{t'}.$$

En notant  $\mathcal{P}_D$  l'ensemble des partitions à parts distinctes, on a aussi :

$$\sum_{\lambda \in DD} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_D} (-1)^{\#\{\text{parts of } \lambda\}} x^{|\lambda|} = \prod_{k \geq 1} (1 - x^k).$$

Ainsi l'équation (72) peut être réécrite :

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) = \left( \sum_{\tilde{\lambda} \in DD(t)} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} \right) \times \prod_{k \geq 1} (1 - x^{kt}) \times \left( \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - x^{kt}} \right)^{t'},$$

ce qui prouve le lemme.  $\square$

Nous donnons aussi une version pour  $t$  pair du Lemme 4.3, qui servira à montrer une généralisation du Théorème 3.1 différente de celle du Théorème 4.1.

LEMME 4.5. *Soient  $t = 2t'$  un entier positif pair,  $\lambda$  une partition à parts distinctes doublées, et fixons  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  son image par  $\Omega$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $\delta_{\lambda} = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0} \delta_{\lambda^{t'}}$ .
- (ii) *Soit  $v$  une case de  $\lambda^0$  et soit  $V$  la case de  $\lambda$  qui est canoniquement associée à  $v$ . La case  $v$  est strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda^0$  si et seulement si  $V$  est strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda$ .*
- (iii) *Soit  $v = (j, k)$  une case de  $\lambda^i$ , avec  $1 \leq i \leq t'$ . Notons  $v^* = (k, j)$  la case de  $\lambda^{t-i} = \lambda^{i*}$  et  $V$  et  $V^*$  les cases de  $\lambda$  qui sont canoniquement associées à  $v$  et  $v^*$ . Si  $V$  est strictement au dessus (respectivement en dessous) de la diagonale principale de  $\lambda^i$ , alors  $V^*$  est strictement en dessous (respectivement au dessus) de la diagonale principale de  $\lambda$ .*

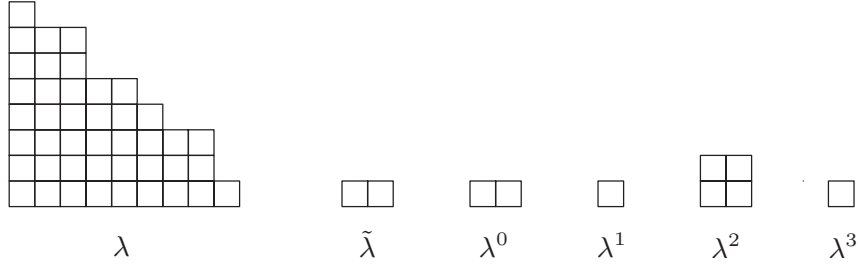


FIGURE 2.5. La décomposition de Littlewood de la partition à parts distinctes doublées  $\lambda = (9, 8, 8, 6, 5, 3, 3, 1)$  pour  $t = 4$ .

Notons que les différences avec le Lemme 4.3 se trouvent dans les propriétés (i) et (iii). En particulier, la propriété (iii) appliquée pour  $i = t'$  nous assure que dans la partition auto-conjuguée  $\lambda^{t'}$ , la position d'une case  $v$  par rapport à la diagonale principale de  $\lambda^{t'}$  (strictement au dessus, sur, ou strictement en dessous) est la même que celle de la case  $V$  qui lui est canoniquement associée par rapport à la diagonale principale de  $\lambda$ .

Comme la preuve est très similaire à celle du Lemme 4.3, nous ne la donnons pas ici.

Ce Lemme nous permet de calculer la fonction génératrice suivante.

LEMME 4.6. *Soit  $t = 2t'$  un entier positif pair. On a :*

$$(73) \quad \sum_{\tilde{\lambda} \in DD_{(t)}} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} = \prod_{k \geq 1} \frac{(1 - x^k)(1 - x^{kt})^{t'-1}}{1 - x^{kt'}}.$$

DÉMONSTRATION. On peut utiliser la décomposition de Littlewood pour obtenir :

$$(74) \quad \begin{aligned} \sum_{\lambda \in DD} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} &= \sum_{\tilde{\lambda} \in DD_{(t)}} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} \times \sum_{\lambda^0 \in DD} \delta_{\lambda^0} x^{t|\lambda^0|/2} \\ &\quad \times \left( \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{t|\lambda|} \right)^{t'} \times \sum_{\lambda^{t'} \in SC} \delta_{\lambda^{t'}} x^{t|\lambda^{t'}|/2}. \end{aligned}$$

En utilisant

$$(75) \quad \sum_{\lambda^{t'} \in SC} \delta_{\lambda^{t'}} x^{t|\lambda^{t'}|/2} = \prod_{k \geq 1} (1 - x^{(2k-1)t'}) = \prod_{k \geq 1} \frac{1 - x^{kt'}}{1 - x^{kt}},$$

et les sommations déjà utilisées dans la preuve du Lemme 4.4, on arrive au résultat désiré.  $\square$

**2.3. Cas des partitions auto-conjuguées.** Soit  $t$  un entier strictement positif. Il est connu d'après [24] que la restriction de la décomposition de Littlewood  $\Omega$  à l'ensemble des partitions auto-conjuguées est une bijection avec l'ensemble des vecteurs de la forme  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1}) \in SC_{(t)} \times \mathcal{P}^t$ , tels que  $\lambda^{t-i-1} = \lambda^{i*}$  pour  $0 \leq i \leq t-1$  (où nous rappelons que  $\lambda^{i*}$  est la partition conjuguée de  $\lambda^i$ ). En particulier, si  $t = 2t' + 1$  est impair, alors la partition  $\lambda^{t'}$  est auto-conjuguée (voir Figure 2.5 ci-dessous pour un exemple).

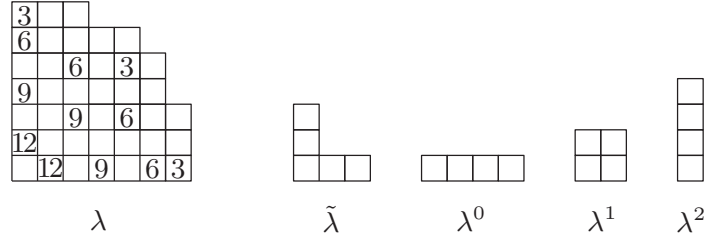


FIGURE 2.6. La décomposition de Littlewood de la partition auto-conjuguée  $\lambda = (7, 7, 7, 6, 6, 5, 3)$  pour  $t = 3$ . Dans le diagramme de Ferrers de  $\lambda$ , nous écrivons seulement les longueurs d'équerres qui sont des multiples entiers de 3.

Pour démontrer nos généralisations du Théorème 3.24, nous allons avoir besoin de nouvelles propriétés de la décomposition de Littlewood pour les partitions auto-conjuguées, qui décrivent le comportement des deux statistiques  $\delta_\lambda$  and  $\varepsilon_h$  sous l'action de  $\Omega$ .

LEMME 4.7. *Soit  $t$  un entier positif, soit  $\lambda$  une partition auto-conjuguée et fixons  $(\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$  son image par  $\Omega$ . Les propositions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *Si  $t = 2t' + 1$  est impair, alors  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^{t'}}$ . Si  $t$  est pair, alors  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}}$ .*
- (ii) *Si  $t = 2t' + 1$  est impair, soit  $v$  une case de  $\lambda^{t'}$  et soit  $V$  la case qui lui est canoniquement associée dans  $\lambda$ . La case  $v$  est strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda^{t'}$  si et seulement si  $V$  est strictement au dessus de la diagonale principale de  $\lambda$ .*
- (iii) *Écrivons  $t = 2t'$  ou  $t = 2t' + 1$  suivant la parité de  $t$ . Soit  $i$  un entier dans  $\{1, \dots, t'\}$ . Soit  $v = (j, k)$  une case de  $\lambda^i$ , dénotons par  $v^*$  la case  $(k, j)$  de  $\lambda^{i*} = \lambda^{t-i-1}$ , et par  $V$  et  $V^*$  les cases de  $\lambda$  qui sont respectivement canoniquement associées aux cases  $v$  et  $v^*$ . Si  $V$  est strictement au dessus (respectivement strictement en dessous) de la diagonale principale de  $\lambda$ , alors  $V^*$  est strictement en dessous (respectivement strictement au dessus) de la diagonale principale de  $\lambda$ . En particulier, on a  $\varepsilon_V \varepsilon_{V^*} = \varepsilon_v \varepsilon_{v^*} = -1$ .*

DÉMONSTRATION. La preuve est ici à nouveau très proche de celle du Lemme 4.3 ; les idées sont identiques, seuls les indices changent. Nous ne donnons donc pas plus de détails.  $\square$

Les propriétés du Lemme 4.7 peuvent être vérifiées dans l'exemple de la Figure 2.6 ci-dessus.

La première propriété du lemme ci-dessus nous permet de calculer la fonction génératrice signée suivante des  $t$ -cores auto-conjugués, qui, comme dans les Lemmes 4.4 et 4.6, dépend de la parité de  $t$ .

LEMME 4.8. *Soit  $t = 2t'$  un entier pair. On a :*

$$(76) \quad \sum_{\lambda \in SC_{(t)}} \delta_\lambda x^{|\lambda|} = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'}.$$

*Soit  $t = 2t' + 1$  un entier impair. On a :*

$$(77) \quad \sum_{\lambda \in SC_{(t)}} \delta_\lambda x^{|\lambda|} = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'} \frac{1 - x^{2it}}{1 - x^{it}}.$$

DÉMONSTRATION. Si  $t = 2t' + 1$  est impair, la décomposition de Littlewood nous permet d'écrire :

$$(78) \quad \sum_{\lambda \in SC} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|} = \sum_{\tilde{\lambda} \in SC_{(t)}} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|} \times \left( \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{2t|\lambda|} \right)^{t'} \times \sum_{\lambda^{t'} \in SC} \delta_{\lambda^{t'}} x^{t|\lambda^{t'}|}.$$

On conclut en utilisant la fonction génératrice des partitions et (75).

Le cas  $t$  pair se prouve de la même manière, la seule différence étant que le dernier terme du membre de droite de (78) n'est pas présent.  $\square$

### 3. Des généralisations grâce à la décomposition de Littlewood

Dans cette section, nous utilisons les propriétés de la décomposition de Littlewood établies dans la section précédente pour généraliser les Théorèmes 3.1 et 3.24. Nous en déduisons plusieurs applications, dont des formules des équerres pour les partitions auto-conjuguées et à parts distinctes doublées.

**3.1. Une première généralisation du Théorème 3.1.** Nous prouvons ici le Théorème 4.1, qui sera vu comme généralisant le Théorème 3.1, et nous en déduisons plusieurs applications.

PREUVE DU THÉORÈME 4.1. Soit  $\lambda$  une partition à parts distinctes doublées. Nous commençons par transformer l'expression

$$(79) \quad \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yt(2z+2)}{\varepsilon_h h} \right)$$

en utilisant la décomposition de Littlewood de  $\lambda$ . Fixons  $\Omega(\lambda) = (\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$ . D'après le Lemme 4.3 (i), on a  $\delta_{\lambda} = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0}$ .

Soit  $B_i$  le multi-ensemble des longueurs d'équerres de  $\mathcal{H}_t(\lambda)$  provenant des cases de  $\lambda$  qui sont canoniquement associées à une case de  $\lambda^i$ , pour  $0 \leq i \leq t-1$ . D'après la propriété (iii) de la décomposition de Littlewood et d'après le Lemme 4.3 (ii), on a :

$$(80) \quad \prod_{h \in B_0} \left( y - \frac{yt(2z+2)}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^0)} \left( y - \frac{y(2z+2)}{\varepsilon_h h} \right).$$

Soit  $v = (j, k)$  une case de  $\lambda^i$ , avec  $1 \leq i \leq t'$ . Notons  $v^* = (k, j)$  la case de  $\lambda^{2t'+1-i} = \lambda^{i^*}$  et notons  $V$  et  $V^*$  les cases de  $\lambda$  qui sont canoniquement associées respectivement à  $v$  et à  $v^*$ . Par le Lemme 4.3 (iii), une des deux cases parmi  $V$  et  $V^*$  est strictement en dessous de la diagonale principale de  $\lambda$ , et l'autre est strictement au dessus de cette même diagonale. On a donc :

$$\left( y - \frac{yt(2z+2)}{\varepsilon_{h_V} h_V} \right) \left( y - \frac{yt(2z+2)}{\varepsilon_{h_{V^*}} h_{V^*}} \right) = y^2 - \left( \frac{yt(2z+2)}{h_V} \right)^2 = y^2 - \left( \frac{y(2z+2)}{h_v} \right)^2,$$

où la dernière égalité provient du fait que  $h_V = th_v$  d'après la propriété (iii) de la décomposition de Littlewood. Multiplier cette égalité pour toutes les cases  $V$  de  $B_i$  donne :

$$(81) \quad \prod_{h \in B_i \cup B_{t-i}} \left( y - \frac{yt(2z+2)}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left( y^2 - \left( \frac{y(2z+2)}{h} \right)^2 \right).$$

En utilisant (80), (81), et la propriété (ii) de la décomposition de Littlewood, on peut réécrire (79) comme suit :

$$\begin{aligned} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yt(2z+2)}{\varepsilon_h h} \right) &= \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} \\ &\times \delta_{\lambda^0} x^{t|\lambda^0|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^0)} \left( y - \frac{y(2z+2)}{\varepsilon_h h} \right) \\ &\times \prod_{i=1}^{t'} x^{t|\lambda^i|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left( y^2 - \left( \frac{y(2z+2)}{h} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Le côté gauche de (68) est obtenu en sommant cette dernière égalité sur toutes les partitions à parts distinctes doublées. Comme la décomposition de Littlewood est bijective, on peut alors réécrire le côté droit comme un produit de trois termes. Le premier est

$$\sum_{\tilde{\lambda} \in DD_{(t)}} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} = \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)(1 - x^{kt})^{t'-1}$$

d'après le Lemme 4.4, alors que le second est

$$\sum_{\lambda^0 \in DD} \delta_{\lambda^0} x^{t|\lambda^0|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^0)} \left( y - \frac{y(2z+2)}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{k \geq 1} (1 - x^{kt} y^{2k})^{2z^2+z}$$

d'après le Théorème 3.1 appliqué avec  $t$  remplacé par  $z$  et  $x$  remplacé par  $x^t y^2$ .

Enfin, le troisième terme est

$$\left( \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{t|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( y^2 - \left( \frac{y(2z+2)}{h} \right)^2 \right) \right)^{t'} = \left( \prod_{k \geq 1} (1 - x^{kt} y^{2k})^{(2z+2)^2-1} \right)^{t'}$$

d'après la formule de Nekrasov-Okounkov (9) appliquée avec  $x$  remplacé par  $x^t y^2$  et  $z$  par  $(2z+2)^2$ .

Il ne reste alors plus qu'à vérifier que  $2z^2 + z + t'((2z+2)^2 - 1) = (2z+1)(zt + 3(t-1)/2)$  pour terminer la preuve.  $\square$

On peut remarquer que lorsque l'on prend  $y = t = 1$ , on retrouve le Théorème 3.1 (ce qui justifie entre autres l'appellation de généralisation que l'on a employée), et lorsque l'on prend  $y = 0$ , on retrouve le Lemme 4.4. Ainsi, on constate que le Théorème 4.1 unifie toutes les formules de Macdonald généralisées par le Théorème 3.1 et la fonction génératrice des  $t$ -cores à parts distinctes doublées  $\lambda$  avec poids  $\delta_\lambda$ .

Dans la suite, nous mentionnons quelques conséquences du Théorème 4.1 sur les partitions à parts distinctes doublées, dans la même veine que ce qu'a fait Han sur les partitions [28]. Dans ce qui suit,  $t = 2t' + 1$  est un entier impair positif.

COROLLAIRE 4.9 ( $z = -1$  dans le Théorème 4.1). *On a :*

$$(82) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} y^{\#\mathcal{H}_t(\lambda)} = \prod_{k \geq 1} (1 - x^k)(1 - x^{kt})^{t'-1} (1 - (x^t y^2)^k)^{1-t'}.$$

COROLLAIRE 4.10 ( $z = -1$ ,  $y = 1$  dans le Théorème 4.1). *L'égalité suivante est vérifiée :*

$$(83) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} = \prod_{k \geq 1} (1 - x^k).$$

On peut remarquer que par définition de  $DD$  et de  $\delta_\lambda$ , (83) est équivalent à (37).

COROLLAIRE 4.11 ( $z = -1$ ,  $y = \sqrt{-1}$  dans le Théorème 4.1). *On a :*

$$(84) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} (-1)^{\#\mathcal{H}_t(\lambda)/2} = \prod_{k \geq 1} (1 - x^k) \prod_{k \text{ impair} \geq 1} \left( \frac{1 - x^{kt}}{1 + x^{kt}} \right)^{t'-1}.$$

DÉMONSTRATION. En fixant  $z = -1$  et  $y = \sqrt{-1}$  dans le Théorème 4.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} (-1)^{\#\mathcal{H}_t(\lambda)/2} &= \prod_{k \geq 1} (1 - x^k) (1 - x^{kt})^{t'-1} (1 - (-1)^k x^{kt})^{1-t'} \\ &= \frac{\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) (1 - x^{kt})^{t'-1}}{\prod_{k \text{ pair} \geq 2} (1 - x^{kt})^{t'-1} \prod_{k \text{ impair} \geq 1} (1 + x^{kt})^{t'-1}} \\ &= \prod_{k \geq 1} (1 - x^k) \prod_{k \text{ impair} \geq 1} \left( \frac{1 - x^{kt}}{1 + x^{kt}} \right)^{t'-1}. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 4.12 ( $y = 1$  dans le Théorème 4.1). *L'égalité suivante est vérifiée :*

$$(85) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( 1 - \frac{t(2z+2)}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{k \geq 1} (1 - x^k) (1 - x^{kt})^{(z+1)(2zt+2t-3)}.$$

COROLLAIRE 4.13 ( $y = 1$  et comparaison des coefficients de  $z + 1$  dans le Théorème 4.1). *On a :*

$$(86) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \sum_{\substack{h \in \mathcal{H}_t(\lambda) \\ h \in \Delta}} \frac{1}{h} = \frac{-1}{2t} \prod_{k \geq 1} (1 - x^k) \sum_{m \geq 1} \frac{x^{tm}}{m(1 - x^{tm})},$$

où nous rappelons que  $\Delta$  est l'ensemble des longueurs des équerres principales de  $\lambda$ .

COROLLAIRE 4.14 ( $2z + 2 = -b/y$ ,  $y \rightarrow 0$  dans le Théorème 4.1). *On a :*

$$(87) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{bt}{h \varepsilon_h} = \exp(-tb^2 x^t / 2) \prod_{k \geq 1} (1 - x^k) (1 - x^{kt})^{t'-1}.$$

DÉMONSTRATION. En fixant  $2z + 2 = -b/y$ , et  $y \rightarrow 0$  dans le Théorème 4.1, le membre gauche devient exactement le membre gauche de (87).

Dans le membre droit, le terme  $\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) (1 - x^{kt})^{t'-1}$  n'est pas modifié. Il reste à examiner  $\prod_{k \geq 1} (1 - (x^t y^2)^k)^{2tz^2 + 4zt - 3z + 3t'}$ . Quand  $y \rightarrow 0$ , on a :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \prod_{k \geq 1} (1 - (x^t y^2)^k)^{3t'} = 1.$$

En utilisant (30), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \prod_{k \geq 1} (1 - (x^t y^2)^k)^{2tz^2 + 4zt - 3z} &= \exp \left( -(2tz^2 + 4zt - 3z) \sum_{k \geq 1} \frac{(x^t y^2)^k}{k(1 - (x^t y^2))^k} \right) \\ &= \exp \left( -\frac{tb^2}{2} (x^t + O(y^2)) \right) \\ &\xrightarrow{y \rightarrow 0} \exp \left( -\frac{tb^2 x^t}{2} \right), \end{aligned}$$

où  $O(y^2)$ , d'après les notations de Landau, est un terme qui tend vers 0 quand  $y \rightarrow 0$ , et le corollaire s'ensuit.  $\square$

COROLLAIRE 4.15 ( $t = 1$  dans le Corollaire 4.14).

$$(88) \quad \sum_{\lambda \in DD} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{b}{h} = \exp(b^2 x/2).$$

DÉMONSTRATION. En fixant  $t = 1$  dans le Corollaire 4.14, nous pouvons remarquer que

$$(89) \quad \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \varepsilon_h = (-1)^{|\lambda|/2}.$$

Le résultat s'ensuit quand on remplace  $x$  par  $-x$ .  $\square$

COROLLAIRE 4.16. [comparaison des coefficients de  $b^{2n} x^{tn}$  dans le Corollaire 4.14] Pour tout entier positif  $n$ , on a :

$$(90) \quad \sum_{\substack{\lambda \in DD, |\lambda|=2tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} = \frac{(-1)^n}{n! t^n 2^n}.$$

La condition dans la somme peut aussi s'exprimer de la manière suivante :  $\lambda \in DD$ ,  $|\lambda| = 2tn$  et le  $t$ -core de  $\lambda$  est vide. Quand  $t = 1$ , on retrouve la formule symplectique des équerres (13) grâce à (89).

COROLLAIRE 4.17. [comparaison des coefficients de  $b^{2n} x^{tn+m}$  dans le Corollaire 4.14] Pour tous entiers positifs  $n$  et  $m$ , on a :

$$(91) \quad \sum_{\substack{\lambda \in DD, |\lambda|=2tn+m \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} = \frac{(-1)^n c_t(m)}{n! t^n 2^n},$$

où  $c_t(m)$  est le nombre de  $DD$   $t$ -cores de poids  $m$ .

La condition sur la somme peut aussi s'énoncer :  $\lambda \in DD$ ,  $|\lambda| = 2tn$  et le poids du  $t$ -core de  $\lambda$  est  $m$ .

COROLLAIRE 4.18. [comparaison des coefficients de  $x^{tn} y^{2n} (z+1)^{2n-1}$  dans le Théorème 4.1] Pour tout entier positif impair  $t$ , l'égalité suivante est vérifiée :

$$(92) \quad \sum_{\substack{\lambda \in DD, |\lambda|=2tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} \sum_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} h \varepsilon_h = \frac{3(-1)^n}{(n-1)! t^n 2^n}.$$



Cette formule est un analogue pour les partitions à parts distinctes doublées de la formule des équerres pointées ([28, Corollaire 5.7]). Quand  $t = 1$ , le Corollaire 4.18 se réduit à

$$\sum_{\lambda \in DD, |\lambda|=2n} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} \sum_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} h \varepsilon_h = \frac{3(-1)^n}{(n-1)!2^n},$$

ce qui est en fait équivalent à la formule symplectique des équerres (13) en remarquant que grâce à (89), on a  $\sum_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} h \varepsilon_h = 3n$  pour toutes les partitions  $\lambda \in DD$  avec  $|\lambda| = 2n$ .

**3.2. Une autre généralisation du Théorème 3.1.** Nous pouvons aussi utiliser le Théorème 3.24 et la décomposition de Littlewood pour prouver une généralisation de la formule de type Nekrasov-Okounkov pour  $\tilde{C}$  dans le cas où  $t$  est pair.

**THÉORÈME 4.19.** *Soit  $t = 2t'$  un entier positif pair. Le développement suivant est valable pour tous nombres complexes  $y$  et  $z$  :*

$$(93) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h} \right) = \prod_{i \geq 1} \frac{(1-x^i)(1-x^{it})^{t'-1}}{1-x^{it'}} \left( \frac{(1-y^{2i}x^{it})^{zt'-1+t'}}{1-y^i x^{it'}} \right)^{z-1}.$$

**DÉMONSTRATION.** La preuve est similaire à celle du Théorème 3.1. Soit  $\lambda$  une partition à parts distinctes doublées. Nous utilisons la décomposition de Littlewood pour transformer l'expression

$$(94) \quad \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h} \right).$$

Fixons  $\Omega(\lambda) = (\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$ . D'après le Lemme 4.5 (i), on a  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0} \delta_{\lambda^{t'}}$ .

Soit  $B_i$  le multi-ensemble des longueurs d'équerres de  $\mathcal{H}_t(\lambda)$  provenant des cases de  $\lambda$  qui sont canoniquement associées à une case de  $\lambda^i$ , pour  $0 \leq i \leq t-1$ . D'après la propriété (iii) de la décomposition de Littlewood et d'après le Lemme 4.5 (ii) et (iii) appliqué pour  $i = t'$ , on a :

$$(95) \quad \prod_{h \in B_0} \left( y - \frac{yzt}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^0)} \left( y - \frac{yz}{\varepsilon_h h} \right),$$

et

$$(96) \quad \prod_{h \in B_{t'}} \left( y - \frac{yzt}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^{t'})} \left( y - \frac{yz}{\varepsilon_h h} \right).$$

Soit  $v = (j, k)$  une case de  $\lambda^i$ , avec  $1 \leq i \leq t' - 1$ . Notons  $v^* = (k, j)$  la case de  $\lambda^{2t'+1-i} = \lambda^{i^*}$  et notons  $V$  et  $V^*$  les cases de  $\lambda$  qui sont canoniquement associées respectivement à  $v$  et à  $v^*$ . Par le Lemme 4.5 (iii), une des deux cases parmi  $V$  et  $V^*$

est strictement en dessous de la diagonale principale de  $\lambda$ , et l'autre est strictement au dessus de cette même diagonale. On a donc :

$$\left(y - \frac{yzt}{\varepsilon_{h_V} h_V}\right) \left(y - \frac{yzt}{\varepsilon_{h_{V^*}} h_{V^*}}\right) = y^2 - \left(\frac{yzt}{h_V}\right)^2 = y^2 - \left(\frac{yz}{h_v}\right)^2,$$

où la dernière égalité provient du fait que  $h_V = th_v$  d'après la propriété (iii) de la décomposition de Littlewood.

On multiplie cette dernière égalité pour toutes les cases  $V$  de  $B_i$  pour obtenir :

$$(97) \quad \prod_{h \in B_i \cup B_{t-i}} \left(y - \frac{yzt}{\varepsilon_h h}\right) = \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left(y^2 - \left(\frac{yz}{h}\right)^2\right).$$

On utilise alors la propriété (ii) de la décomposition de Littlewood ainsi que (95), (96) et (97) pour montrer que :

$$(98) \quad \delta_\lambda x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left(y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h}\right) = \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} \times \delta_{\lambda^0} x^{t|\lambda^0|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^0)} \left(y - \frac{yz}{\varepsilon_h h}\right) \\ \times \prod_{i=1}^{t'-1} \left(x^{t|\lambda^i|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left(y^2 - \left(\frac{yz}{h}\right)^2\right)\right) \times \delta_{\lambda^{t'}} x^{t\lambda^{t'}/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^{t'})} \left(y - \frac{yz}{\varepsilon_h h}\right).$$

Le coté gauche de (93) est obtenu en sommant l'égalité précédente sur toutes les partitions à parts distinctes doublées. Comme la décomposition de Littlewood est bijective, on peut alors réécrire le côté droit comme un produit de quatre termes.

Le premier est :

$$(99) \quad \sum_{\tilde{\lambda} \in DD(t)} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|/2} = \prod_{i \geq 1} \frac{(1 - x^i)(1 - x^{it})^{t'-1}}{1 - x^{it'}},$$

d'après le Lemme 4.6. Le second est :

$$(100) \quad \sum_{\lambda^0 \in DD} \delta_{\lambda^0} x^{t|\lambda^0|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^0)} \left(y - \frac{yz}{\varepsilon_h h}\right) = \prod_{i \geq 1} (1 - y^{2i} x^{it})^{(z^2 - 3z + 2)/2},$$

d'après le Théorème 3.1 appliqué avec  $2t + 2$  remplacé par  $z$  et  $x$  remplacé par  $x^t y^2$ . Le troisième est :

$$(101) \quad \left( \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{t|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left(y^2 - \left(\frac{yz}{h}\right)^2\right) \right)^{t'-1} = \prod_{i \geq 1} (1 - y^{2i} x^{it})^{(z^2 - 1)(t'-1)},$$

d'après la formule de Nekrasov-Okounkov appliquée avec  $x$  remplacé par  $x^t y^2$ .

Enfin le quatrième et dernier terme est :

$$(102) \quad \sum_{\lambda^{t'} \in SC} \delta_{\lambda^{t'}} x^{t\lambda^{t'}/2} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^{t'})} \left(y - \frac{yz}{\varepsilon_h h}\right) = \prod_{i \geq 1} \left( \frac{(1 - y^{2i} x^{it})^{z/2+1}}{1 - y^i x^{it'}} \right)^{z-1},$$

d'après le Théorème 3.24 appliqué avec  $x$  remplacé par  $x^t y^2$  et  $z$  remplacé par  $z/2$ .

Un regroupement des termes similaires conclut la preuve.  $\square$

On remarquera que l'appellation de "généralisation" donnée au théorème précédent ne l'a été que par analogie avec ce qui se passait pour le Théorème 4.1. Ici, il ne semble pas possible de spécialiser  $t$ ,  $y$  et  $z$  de manière à retrouver le Théorème 3.24. Cependant, en prenant  $z = 0$  et  $y = 1$ , ou bien en prenant  $z = 1$ , on retrouve le Lemme 4.6 (dans le cas  $z = 1$ , il n'est pas évident, même si pas difficile, de vérifier que la somme à gauche porte alors uniquement sur les  $t$ -cores à parts distinctes doublées).

On donne maintenant quelques conséquences de ce théorème.

COROLLAIRE 4.20 ( $z = -b/y$ ,  $y \rightarrow 0$  dans le Théorème 4.19). *On a :*

$$(103) \quad \sum_{\lambda \in DD} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|/2} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{bt}{h \varepsilon_h} = \exp(-bx^{t'} - tb^2 x^t/2) \prod_{i \geq 1} \frac{(1-x^i)(1-x^{it})^{t'-1}}{1-x^{it'}}.$$

DÉMONSTRATION. En fixant  $z = -b/y$ , et  $y \rightarrow 0$  dans le Théorème 4.19, le membre gauche devient exactement le membre gauche de (103).

Dans le côté droit, le terme  $\prod_{i \geq 1} \frac{(1-x^i)(1-x^{it})^{t'-1}}{1-x^{it'}}$  n'est pas modifié. En utilisant (30), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \left( \frac{(1-y^{2i}x^{it})^{zt'-1+t'}}{1-y^i x^{it'}} \right)^{z-1} &= \exp \left( -(z-1)(zt'-1+t') \sum_{k \geq 1} \frac{(x^t y^2)^k}{k(1-(x^t y^2))^k} \right) \\ &\quad \times \exp \left( (z-1) \sum_{k \geq 1} \frac{(x^{t'} y)^k}{k(1-(x^{t'} y))^k} \right) \\ &= \exp \left( -\frac{tb^2}{2} x^t - bx^{t'} + O(y) \right) \\ &\xrightarrow{y \rightarrow 0} \exp \left( -\frac{tb^2 x^t}{2} - bx^{t'} \right), \end{aligned}$$

où  $O(y)$ , d'après les notations de Landau, est un terme qui tend vers 0 quand  $y \rightarrow 0$ , et le corollaire s'ensuit.  $\square$

Contrairement au cas où  $t$  est un entier impair, tenter d'extraire les coefficients dans la formule précédente pour obtenir une (jolie) formule des équerres ne semble pas mener à des calculs faisables. On obtient cependant le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.21 (comparer les coefficients de  $b^n x^{tn/2}$  dans le Corollaire 4.20). *On a :*

$$(104) \quad \sum_{\substack{\lambda \in DD, |\lambda|=tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=n}} \delta_{\lambda} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{t}{h \varepsilon_h} = [x^{t'n}] \exp(-x^{t'} - tx^t/2).$$

*En particulier, quand on fixe  $t = 2$ , on obtient :*

$$(105) \quad \sum_{\substack{\lambda \in DD, |\lambda|=2n \\ \#\mathcal{H}_2(\lambda)=n}} \delta_{\lambda} \prod_{h \in \mathcal{H}_2(\lambda)} \frac{2}{h \varepsilon_h} = [x^n] \exp(-x - x^2) := \frac{c_n}{n!},$$

où  $c_n$  est un entier égal à  $H_n(-1/2)$ , où  $H_n(x)$  est le  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Hermite, et  $c_n$  satisfait la relation de récurrence suivante pour  $n \geq 2$  :

$$(106) \quad c_n = -c_{n-1} - 2(n-1)c_{n-2}.$$

Il serait intéressant de trouver une preuve directe (voire bijective) de l'intégralité des coefficients  $c_n$  à partir de l'expression en termes de somme sur des partitions à parts distinctes doublées.

**3.3. Deux généralisations du Théorème 3.24.** En utilisant les propriétés de la décomposition de Littlewood des partitions auto-conjuguées vues dans la section précédente, nous pouvons prouver deux généralisations du Théorème 3.24 avec deux paramètres supplémentaires  $y$  et  $t$  ; où  $y$  est un nombre complexe quelconque et  $t$  est un entier pair dans le premier cas, et impair dans le second.

**THÉORÈME 4.22.** *Soit  $t = 2t'$  un entier pair. Pour tous les nombres complexes  $y$  et  $z$ , le développement suivant est valable :*

$$(107) \quad \sum_{\lambda \in SC} \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h} \right) = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'} (1 - y^{2i} x^{2it})^{(z^2-1)t'}.$$

**DÉMONSTRATION.** À nouveau, la preuve est similaire à celle du Théorème 4.1, mais est ici plus simple. Soit  $\lambda$  une partition auto-conjuguée. On commence par transformer l'expression :

$$(108) \quad \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h} \right).$$

Fixons  $\Omega(\lambda) = (\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$ . D'après le Lemme 4.7 (i), on a  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}}$ .

Soit  $B_i$  le multi-ensemble des longueurs d'équerres de  $\mathcal{H}_t(\lambda)$  provenant des cases de  $\lambda$  qui sont canoniquement associées à une case de  $\lambda^i$ , pour  $0 \leq i \leq t-1$ .

Par le Lemme 4.7 (iii), et grâce au même raisonnement que dans la preuve du Théorème 4.1, on obtient pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i \leq t' - 1$  :

$$(109) \quad \prod_{h \in B_i \cup B_{t-i-1}} \left( y - \frac{yzt}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left( y^2 - \left( \frac{yz}{h} \right)^2 \right).$$

On utilise alors la propriété (ii) de la décomposition de Littlewood ainsi que (109) pour montrer que :

$$(110) \quad \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h} \right) = \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|} \times \prod_{i=0}^{t'-1} \left( x^{2t|\lambda^i|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left( y^2 - \left( \frac{yz}{h} \right)^2 \right) \right).$$

Le coté gauche de (107) est obtenu en sommant l'égalité précédente sur toutes les partitions auto-conjuguées. Comme la décomposition de Littlewood est bijective, on peut alors réécrire le côté droit comme un produit de deux termes.

Le premier est :

$$(111) \quad \sum_{\tilde{\lambda} \in SC_{(t)}} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|} = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'},$$

d'après le Lemme 4.8. Le second est :

$$(112) \quad \left( \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{2t|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \left( y^2 - \left( \frac{yz}{h} \right)^2 \right) \right)^{t'} = \prod_{i \geq 1} (1 - y^{2i} x^{2it})^{(z^2-1)t'},$$

d'après la formule de Nekrasov-Okounkov appliquée avec  $x$  remplacé par  $x^{2t}y^2$ , ce qui conclut cette preuve.  $\square$

Remarquons que quand on pose  $y = 0$ , nous retrouvons le Lemme 4.8, mais il ne semble pas aisé de retrouver le Théorème 3.24.

COROLLAIRE 4.23 ( $z = -b/y$ ,  $y \rightarrow 0$  dans le Théorème 4.22). On a :

$$(113) \quad \sum_{\lambda \in SC} \delta_{\lambda} x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{bt}{h \varepsilon_h} = \exp(-b^2 t' x^{2t}) \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'}.$$

DÉMONSTRATION. En fixant  $z = -b/y$  et en faisant tendre  $y$  vers 0 dans le Théorème 4.22, le côté gauche de (107) devient exactement celui de (113).

Dans le coté droit, le terme  $\frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'}$  n'est pas modifié. Il reste donc à examiner l'autre terme. En utilisant (87), quand  $y \rightarrow 0$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \prod_{i \geq 1} (1 - y^{2i} x^{2it})^{(z^2-1)t'} &= \exp \left( -((z^2 - 1)t') \sum_{k \geq 1} \frac{y^{2k} x^{2kt}}{k(1 - (y^{2k} x^{2kt})^k)} \right) \\ &= \exp(-t' b^2 x^{2t} + O(y^2)) \\ &\xrightarrow{y \rightarrow 0} \exp(-t' b^2 x^{2t}), \end{aligned}$$

où  $O(y^2)$  est un terme qui tend vers 0 quand  $y \rightarrow 0$ .  $\square$

COROLLAIRE 4.24 (comparer les coefficients de  $b^{2n} x^{2tn}$  dans le Corollaire 4.23). On a :

$$(114) \quad \sum_{\substack{\lambda \in SC, |\lambda|=2tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h} = \frac{1}{n! 2^n t^n}.$$

La condition sur la somme peut aussi être écrite sous la forme suivante :  $\lambda \in SC$ ,  $|\lambda| = 2tn$  et le  $t$ -core de  $\lambda$  est vide.

DÉMONSTRATION. Extraire le coefficient de  $b^{2n} x^{2tn}$  de chacun des côtés du Corollaire 4.23 donne directement l'égalité suivante :

$$(115) \quad \sum_{\substack{\lambda \in SC, |\lambda|=2tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \delta_{\lambda} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{t}{h \varepsilon_h} = \frac{(-1)^n t'^n}{n!}.$$

Rappelons que, comme  $\lambda$  est auto-conjugué, chacune de ses longueurs d'équerres principales est impaire. Comme la somme de toutes les longueurs d'équerres principales est égale à  $|\lambda| = 2n$ , elle est donc paire. En conséquence, un raisonnement direct sur les parités nous dit qu'il y a un nombre pair de longueur d'équerres principales, et donc  $\delta_\lambda = 1$ .

Comme  $t$  est pair, aucune des longueurs d'équerres principales de  $\lambda$  n'est un multiple entier de  $t$ . Ainsi, si une case  $(i, j)$  a pour longueur d'équerre un multiple entier de  $t$ , la case  $(j, i)$  est distincte de la case  $(i, j)$  et a aussi pour longueur d'équerre un multiple entier de  $t$ . Ainsi, on a  $\varepsilon_{(i,j)}\varepsilon_{(j,i)} = -1$ , donc  $\prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \varepsilon_h = (-1)^n$ , et le corollaire s'ensuit.  $\square$

COROLLAIRE 4.25 (comparer les coefficients de  $b^{2n}x^{2tn+m}$  dans chacun des côtés du Corollaire 4.23). On a :

$$(116) \quad \sum_{\substack{\lambda \in SC, |\lambda|=2tn+m \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda)=2n}} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h} = \frac{sc_t(m)}{n!2^n t^n},$$

où  $sc_t(m)$  est le nombre de  $t$ -cores auto-conjugués de poids  $m$ .

On s'intéresse maintenant à une généralisation pour  $t$  impair du Théorème 3.24.

THÉOREME 4.26. Soit  $t = 2t' + 1$  un entier impair. Pour tous nombres complexes  $y$  et  $z$ , le développement suivant est valable :

$$(117) \quad \sum_{\lambda \in SC} \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h} \right) = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'} \frac{1 - x^{2it}}{1 - x^{it}} \frac{(1 - y^{2i} x^{2it})^{(tz^2 + z - t - 1)/2}}{(1 - y^i x^{it})^{z-1}}.$$

DÉMONSTRATION. Comme dans les deux cas précédents, la preuve est similaire à celle du Théorème 4.1. Soit  $\lambda$  une partition auto-conjuguée. On commence par transformer l'expression :

$$(118) \quad \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h} \right).$$

Fixons  $\Omega(\lambda) = (\tilde{\lambda}, \lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{t-1})$ . D'après le Lemme 4.7 (i), on a  $\delta_\lambda = \delta_{\tilde{\lambda}} \delta_{\lambda^0}$ .

Soit  $B_i$  le multi-ensemble des longueurs d'équerres de  $\mathcal{H}_t(\lambda)$  provenant des cases de  $\lambda$  qui sont canoniquement associées à une case de  $\lambda^i$ , pour  $0 \leq i \leq t-1$ .

Rapellons que  $\lambda^{t'}$  est auto-conjugué. Par le Lemme 4.7 (ii) et la propriété (iii) de la décomposition de Littlewood, on montre que :

$$(119) \quad \prod_{h \in B_{t'}} \left( y - \frac{yzt}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^{t'})} \left( y - \frac{yz}{\varepsilon_h h} \right).$$

Par le Lemme 4.7 (iii), et grâce au même raisonnement que dans la preuve du Théorème 4.1, on obtient pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i \leq t' - 1$  :

$$(120) \quad \prod_{h \in B_i \cup B_{t-i-1}} \left( y - \frac{yzt}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left( y^2 - \left( \frac{yz}{h} \right)^2 \right).$$

On utilise alors la propriété (ii) de la décomposition de Littlewood ainsi que (119) et (120) pour montrer que :

$$(121) \quad \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \left( y - \frac{yzt}{h \varepsilon_h} \right) = \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|} \times \prod_{i=0}^{t'-1} \left( x^{2t|\lambda^i|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^i)} \left( y^2 - \left( \frac{yz}{h} \right)^2 \right) \right) \\ \times \sum_{\lambda^{t'} \in SC} \delta_{\lambda^{t'}} x^{t|\lambda^{t'}|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^{t'})} \left( y - \frac{yz}{\varepsilon_h h} \right).$$

Le coté gauche de (107) est obtenu en sommant l'égalité précédente sur toutes les partitions auto-conjuguées. Comme la décomposition de Littlewood est bijective, on peut alors réécrire le côté droit comme un produit de trois termes.

Le premier est :

$$(122) \quad \sum_{\tilde{\lambda} \in SC_{(t)}} \delta_{\tilde{\lambda}} x^{|\tilde{\lambda}|} = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'} \frac{1 - x^{2it}}{1 - x^{it}},$$

d'après le Lemme 4.8. Le second est donné par (112) d'après la formule de Nekrasov-Okounkov appliquée avec  $x$  remplacé par  $x^{2t}y^2$ . Le troisième est

$$(123) \quad \sum_{\lambda^{t'} \in SC} \delta_{\lambda^{t'}} x^{t|\lambda^{t'}|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda^{t'})} \left( y - \frac{yz}{\varepsilon_h h} \right) = \prod_{i \geq 1} \left( \frac{(1 - y^{2i} x^{it})^{z/2+1}}{1 - y^i x^{it'}} \right)^{z-1},$$

d'après le Théorème 3.24 appliqué avec  $x$  remplacé par  $x^t y^2$  et  $z$  remplacé par  $z/2$ .  $\square$

A nouveau, quand  $y = 0$ , on retrouve le Lemme 4.8. En outre, quand  $t = y = 1$  et que l'on remplace  $z$  par  $2z$ , nous retrouvons le Théorème 3.24, ce qui légitime le nom de généralisation donné au Théorème 4.26.

COROLLAIRE 4.27 ( $z = -b/y$ ,  $y \rightarrow 0$  dans le Théorème 4.26). On a :

$$(124) \quad \sum_{\lambda \in SC} \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{bt}{h \varepsilon_h} = \exp(-bx^t - tb^2 x^{2t}/2) \prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'} \frac{1 - x^{2it}}{1 - x^{it}}.$$

DÉMONSTRATION. En fixant  $z = -b/y$ , et  $y \rightarrow 0$  dans le Théorème 4.26, le membre gauche devient exactement le membre gauche de (124).

Dans le côté droit, le terme  $\prod_{i \geq 1} \frac{1 - x^i}{1 - x^{2i}} (1 - x^{2it})^{t'} \frac{1 - x^{2it}}{1 - x^{it}}$  n'est pas modifié. En utilisant (30), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{(1 - y^{2i} x^{2it})^{(tz^2 + z - t - 1)/2}}{(1 - y^i x^{it})^{z-1}} &= \exp \left( -(tz^2 + z - t - 1)/2 \sum_{k \geq 1} \frac{(x^t y^2)^k}{k(1 - (x^t y^2))^k} \right) \\ &\quad \times \exp \left( (z - 1) \sum_{k \geq 1} \frac{(x^{t'} y)^k}{k(1 - (x^{t'} y))^k} \right) \\ &= \exp \left( -\frac{tb^2}{2} x^t - bx^{t'} + O(y) \right) \\ &\xrightarrow{y \rightarrow 0} \exp \left( -\frac{tb^2 x^t}{2} - bx^{t'} \right), \end{aligned}$$

où  $O(y)$ , d'après les notations de Landau, est un terme qui tend vers 0 quand  $y \rightarrow 0$ , et le corollaire s'ensuit.  $\square$

COROLLAIRE 4.28 ( $t = 1$  et  $b = 1$  dans le Corollaire 4.27). *On a :*

$$(125) \quad \sum_{\lambda \in SC} \delta_\lambda x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} = \exp(-x - x^2/2).$$

Notons qu'ici, nous ne pouvons pas simplifier le signe comme dans la preuve du Corollaire 4.24. L'équation (125) peut être comparée à la très connue fonction génératrice suivante impliquant des partitions (voir par exemple [29, Équation (1.1)]), qui peut être prouvée en utilisant l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth :

$$(126) \quad \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{|\lambda|} \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{1}{h} = \exp(x + x^2/2).$$

COROLLAIRE 4.29 (Comparer les coefficients de  $b^n x^{tn}$  dans le Corollaire 4.27). *On a :*

$$(127) \quad \sum_{\substack{\lambda \in SC, |\lambda| = tn \\ \#\mathcal{H}_t(\lambda) = n}} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}_t(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} = [x^{tn}] \exp(x^t - tx^{2t}/2).$$

*Si on pose  $t = 1$ , on obtient :*

$$(128) \quad \sum_{\lambda \in SC, |\lambda| = n} \delta_\lambda \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} \frac{1}{h \varepsilon_h} = [x^n] \exp(-x - x^2/2) := \frac{a_n}{n!}.$$

*Alors les coefficients  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des entiers et satisfont la relation de récurrence suivante pour  $n \geq 2$  :*

$$(129) \quad a_n = -a_{n-1} - na_{n-2}.$$

Comme pour le cas des partitions à parts distinctes doublées, il serait intéressant de trouver une preuve directe de cette propriété d'intégralité.





## Éléments cycliquement pleinement commutatifs dans les groupes de Coxeter

*Et on fait tourrrrrner les serrrrrviettes*

---

Apocryphe, Georges Brassens (2015)

### 1. Introduction

Soit  $W$  un groupe de Coxeter. Un élément  $w \in W$  est dit *pleinement commutatif* (que l'on abrégera par PC dans la suite) si et seulement si toute expression réduite de  $w$  peut être obtenue de n'importe quelle autre expression réduite de  $w$  en utilisant uniquement des relations de commutation. Ces éléments ont été introduits et étudiés de manière indépendante par Fan dans sa thèse [20], Graham dans [25] et Stembridge dans [77, 78, 79]. En particulier, Stembridge classifia les groupes de Coxeter ayant un nombre fini d'éléments pleinement commutatifs, et énuméra ces éléments dans chacun des groupes susdits. Les éléments pleinement commutatifs apparaissent naturellement dans le contexte des algèbres (généralisées) de Temperley–Lieb, car ils indexent une base linéaire de ces algèbres. Plus récemment, dans [7], Biagioli, Jouhet et Nadeau ont raffiné l'énumération due à Stembridge en comptant ces éléments relativement à leur longueur de Coxeter dans tous les groupes de Coxeter finis et affines ; l'énumération par la longueur permettant d'effectuer cette énumération y compris s'il y a un nombre infini d'éléments pleinement commutatifs dans le groupe.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur un sous-ensemble de l'ensemble des éléments pleinement commutatifs, les éléments *cycliquement pleinement commutatifs* (que l'on abrégera par CPC). Ce sont les éléments  $w$  pour lesquels tout décalage cyclique d'une décomposition réduite de  $w$  est une expression réduite d'un élément pleinement commutatif (qui peut être différent de  $w$ ). Les éléments CPC ont été introduits par Boothby *et al.* dans [9], où les auteurs ont caractérisé les groupes de Coxeter dans lesquels il y a un nombre fini d'éléments cycliquement pleinement commutatifs (ils montrent que ce sont exactement les groupes où il y a un nombre fini d'éléments pleinement commutatifs), et énuméré ces éléments dans lesdits groupes. Le but principal de [9] était d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un élément cycliquement pleinement commutatif  $w \in W$  soit *logarithmique*, c'est à dire vérifie  $\ell(w^k) = k\ell(w)$  pour tout entier positif  $k$ . Ceci est la première étape dans l'étude d'une version cyclique du théorème de Matsumoto pour les éléments cycliquement pleinement commutatifs.

Nous introduisons ici une nouvelle opération sur les empilements, la *clôture cylindrique*, qui de manière informelle, met en relation les points maximaux et les points minimaux d'un empilement, comme cela a été fait de manière un peu plus générale dans [17] pour des arrangements d'hyperplans. Cela va nous permettre

d'obtenir une nouvelle caractérisation des éléments cycliquement pleinement commutatifs (voir Théorème 5.14). Dans le cas des groupes de Coxeter finis ou affines, cette caractérisation peut être reformulée en termes de mots réduits en utilisant le travail de [7]. Cela nous permet alors d'énumérer les éléments cycliquement pleinement commutatifs en prenant en compte leurs longueurs de Coxeter. Nous prouvons également que le nombre d'involutions cycliquement pleinement commutatives est fini dans tous les groupes de Coxeter.

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous rappelons dans la section 2 les définitions et premières propriétés des éléments pleinement et cycliquement pleinement commutatifs ainsi que des empilements. Puis nous introduisons une nouvelle opération sur les empilements, la *clôture cylindrique*, et nous en déduisons une nouvelle caractérisation des éléments CPC en termes d'évitement de motifs pour les clôtures cylindriques. Dans la section 3, nous utilisons cette caractérisation pour obtenir une classification complète (en termes d'expressions réduites) des éléments CPC en type affine  $\tilde{A}_{n-1}$ . Nous en déduisons aussi une classification des éléments CPC en type  $A_{n-1}$ , et nous utilisons ceci pour énumérer les éléments CPC selon leurs longueurs de Coxeter dans ces deux types. Le même travail est effectué pour les types  $\tilde{C}_n$ ,  $B_n$ ,  $D_{n+1}$ ,  $\tilde{B}_{n+1}$ , et  $\tilde{D}_{n+2}$  dans la section 4. Dans cette même section, on s'occupe aussi des types exceptionnels, et nous étudions les éléments CPC qui sont logarithmiques dans les types affines. Dans la section 5, nous nous concentrons sur les éléments CPC involutifs. Le résultat principal de cette section est le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini d'involutions CPC dans tout groupe de Coxeter. Nous donnons aussi une caractérisation des involutions CPC pour tous les groupes de Coxeter, et nous les énumérons selon leurs longueurs de Coxeter dans tous les types finis et affines.

## 2. Éléments cycliquement pleinement commutatifs et empilements

**2.1. Éléments cycliquement pleinement commutatifs.** Ce paragraphe présente les définitions des deux types d'éléments de groupes de Coxeter que nous étudions dans ce chapitre.

Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter (voir la Définition 2.1). Un élément  $w \in W$  est dit *pleinement commutatif* si toute expression dans  $R(w)$  peut être obtenue de n'importe quelle autre en n'utilisant que des relations de commutation. Dans la suite de cette thèse, on écrira souvent PC pour pleinement commutatif.

**DÉFINITION 5.1.** ([9, Définition 3.4]) Étant donné un mot  $\mathbf{w} = s_{a_1} \dots s_{a_n}$ , le décalage cyclique *gauche* (respectivement *droit*) de  $\mathbf{w}$  est  $s_{a_2} \dots s_{a_n} s_{a_1}$  (respectivement  $s_{a_n} s_{a_1} \dots s_{a_{n-1}}$ ). Un *décalage cyclique* de  $\mathbf{w}$  est  $s_{a_k} \dots s_{a_{k-2}} s_{a_{k-1}}$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Un élément  $w \in W$  est *cycliquement pleinement commutatif* si tous les décalages cycliques de chaque mot de  $R(w)$  sont la décomposition réduite d'un élément pleinement commutatif (qui peut être différent de  $w$ ).

Pour la concision, on écrira souvent CPC pour cycliquement pleinement commutatif. On notera l'ensemble des éléments CPC de  $W$  par  $W^{CPC}$ .

**2.2. Empilements et éléments pleinement commutatifs.** Nous suivons Stembridge [77] dans ce paragraphe. Fixons un mot  $\mathbf{w} = s_{a_1} \dots s_{a_\ell}$  dans  $S^*$ , le monoïde libre engendré par  $S$  (notons que ce mot ne doit pas nécessairement être

réduit). On définit un ordre partiel sur les indices  $\{1, \dots, \ell\}$  en étendant par transitivité et réflexivité la relation  $\prec$  suivante :

$$i \prec j \text{ si } \begin{cases} \text{ou bien } i < j \text{ et } m_{s_{a_i}s_{a_j}} \geq 3, \\ \text{ou bien } i < j \text{ et } a_i = a_j. \end{cases}$$

On note  $H_{\mathbf{w}}$  ce poset accompagné de l'étiquetage  $i \mapsto s_{a_i}$ . On appelle  $H_{\mathbf{w}}$  l'*empilement* de  $\mathbf{w}$ . On appellera souvent les éléments de  $H_{\mathbf{w}}$  des *points*. Dans le diagramme de Hasse de  $H_{\mathbf{w}}$ , les éléments ayant la même étiquette seront dessinés dans une même colonne. La *taille*  $|H_{\mathbf{w}}|$  d'un empilement  $H_{\mathbf{w}}$  est le cardinal du poset sous-jacent ; c'est aussi le nombre de points dans le diagramme de Hasse. Soit  $H$  un empilement ; étant donné un sous-ensemble  $I \subset S$ , on notera  $H_I$  le sous-poset induit par tous les éléments de  $H$  dont les étiquettes sont dans  $I$ . En particulier  $H_s := H_{\{s\}}$  pour  $s \in S$  est la chaîne  $H_s = s^{(1)} \prec s^{(2)} \prec \dots \prec s^{(k)}$  où  $k = |H_s|$ . On notera aussi, pour des raisons de commodité,  $|\mathbf{w}_s|$  le nombre  $|H_s|$  (la raison est que ce nombre compte aussi le nombre d'occurrences de la lettre  $s$  dans  $\mathbf{w}$ ). Dans  $H$ , il y a une *relation de couverture de chaîne* entre deux entiers distincts  $i$  et  $j$ , ce que l'on notera  $i \prec_c j$ , si  $i \prec j$  et l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (i)  $m_{s_{a_i}s_{a_j}} \geq 3$  et il n'y a pas d'entier  $z$  avec la même étiquette que  $i$  ou  $j$  tel que  $i \prec z \prec j$ , ou
- (ii)  $s_{a_i} = s_{a_j}$  et il n'existe pas d'entier  $z$  tel que  $i \prec z \prec j$ .

Dans la Figure 2.1, nous fixons un diagramme de Coxeter sur la gauche, et nous donnons deux exemples de mots accompagnés des empilements correspondants.

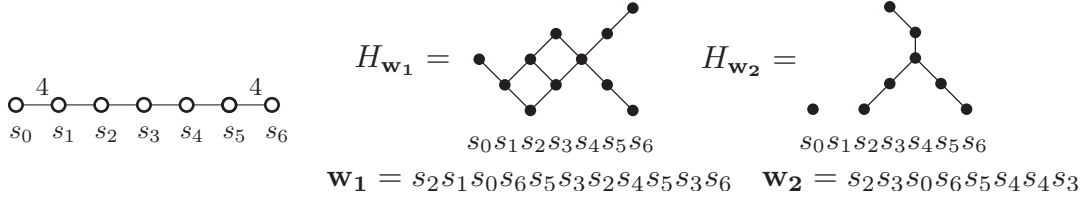


FIGURE 2.1. Deux empilements différents. La ligne supérieure donne les étiquettes correspondant aux colonnes.

Si on considère les empilements à isomorphismes de posets préservant l'étiquetage près, alors les empilements encodent précisément les *classes de commutation* ; i.e. le mot  $\mathbf{w}'$  peut être obtenu du mot  $\mathbf{w}$  en effectuant des commutations entre des générateurs (et donc  $\mathbf{w}'$  et  $\mathbf{w}$  sont dans la même classe de commutation) si et seulement si il existe un isomorphisme de posets entre  $H_{\mathbf{w}}$  et  $H_{\mathbf{w}'}$  (voir [77, Proposition 2.2]). En particulier, si l'élément  $w$  est PC, alors les empilements de toutes ses décompositions réduites sont isomorphes ; on peut donc ainsi définir l'empilement de  $w$ , qui sera noté  $H_w$ .

Soit  $\mathbf{w} = s_{a_1} \dots s_{a_\ell}$  une expression non nécessairement réduite. Une *extension linéaire* du poset  $H_{\mathbf{w}}$  est un ordre total  $\pi$  sur  $\{1, \dots, \ell\}$  tel que  $i \prec j$  implique  $\pi(i) < \pi(j)$ . Définissons maintenant  $\mathcal{L}(H_{\mathbf{w}})$  comme étant l'ensemble des mots  $s_{a_{\pi(1)}} \dots s_{a_{\pi(\ell)}}$  où  $\pi$  parcourt l'ensemble des extensions linéaires de  $H_{\mathbf{w}}$ .

**PROPOSITION 5.2.** [77, Proposition 1.2] *Soit  $w$  un élément pleinement commutatif. Alors  $\mathcal{L}(H_{\mathbf{w}})$  est égal à  $\mathcal{R}(w)$  pour un (ou de manière équivalente, pour chaque) mot  $\mathbf{w} \in \mathcal{R}(w)$ .*

Cette proposition n'est pas valable pour les éléments non pleinement commutatifs. Par exemple, dans le groupe de Coxeter de type  $A_2$  (voir Figure 3.1 pour le diagramme de Coxeter associé), l'élément  $w$  admettant  $\mathbf{w} = s_1 s_2 s_1$  comme décomposition réduite n'est pas PC. On a alors  $\mathcal{L}(H_{s_1 s_2 s_1}) = \{s_1 s_2 s_1\}$  tandis que  $\mathcal{R}(w) = \{s_1 s_2 s_1, s_2 s_1 s_2\}$ .

Une chaîne  $i_1 \prec \cdots \prec i_m$  dans un poset  $H$  est *convexe* si les seuls points  $u$  satisfaisant  $i_1 \preceq u \preceq i_m$  sont les points  $i_j$  de la chaîne. Notons que si une chaîne  $i_1 \prec \cdots \prec i_m$  est convexe alors on a  $i_1 \prec_c \cdots \prec_c i_m$ . Le résultat suivant caractérise les *empilements pleinement commutatifs*, c'est-à-dire les empilements représentant la classe de commutation d'un élément PC.

PROPOSITION 5.3. [77, Proposition 3.3] *Un empilement  $H$  est l'empilement d'un élément PC si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *il n'y a pas de chaîne convexe  $i_1 \prec \cdots \prec i_{m_{st}}$  dans  $H$  telle que  $s_{a_{i_1}} = s_{a_{i_3}} = \cdots = s$  et  $s_{a_{i_2}} = s_{a_{i_4}} = \cdots = t$  avec  $3 \leq m_{st} < \infty$ ; et*
- (ii) *il n'y a pas de relation de couverture de chaîne  $i \prec_c j$  dans  $H$  telle que  $s_{a_i} = s_{a_j}$ .*

**2.3. Clôtures cylindriques des empilements et éléments cycliquement pleinement commutatifs.** Dans ce paragraphe, nous fixons  $(W, S)$  un système de Coxeter quelconque. Désormais, nous allons nous concentrer sur les éléments CPC. Avant, nous allons avoir besoin de définir une nouvelle opération sur les empilements, que nous avons appelée la *clôture cylindrique*. Informellement parlant, l'idée sous-jacente est d'ajouter des relations entre les points maximaux et minimaux d'un empilement, comme cela a pu être fait dans un contexte plus général d'arrangements d'hyperplans [17]. Néanmoins, notre approche en termes de clôture cylindrique s'accommode mieux avec notre but énumératif, car nous encodons tout l'ensemble des décalages cycliques d'un mot réduit dans un unique diagramme.

DÉFINITION 5.4. Soit  $H := H_{\mathbf{w}}$  l'empilement d'un mot (non nécessairement réduit)  $\mathbf{w} = s_{a_1} \dots s_{a_\ell}$ . La *clôture cylindrique*  $H^c$  de  $H$  est l'étiquetage  $i \mapsto s_{a_i}$  et une relation  $\prec_c$  sur les indices  $\{1, \dots, \ell\}$ , composée des relations de couverture de chaîne  $\prec_c$  de  $H$ , ainsi que des nouvelles relations définies comme suit.

- (i) Pour chaque générateur  $s$ , considérons le point minimal  $a$  et le point maximal  $b$  de la chaîne  $H_s$  (pour l'ordre partiel  $\prec$ ). Si  $a$  est minimal dans le poset  $H$ , si  $b$  est maximal dans  $H$ , et si  $a \neq b$ , alors on ajoute une nouvelle relation  $b \prec_c a$ .
- (ii) Pour chaque couple  $(s, t)$  de générateurs tels que  $m_{st} \geq 3$  (en particulier,  $s$  et  $t$  sont distincts), considérons le point minimal  $a$  et le point maximal  $b$  de la chaîne  $H_{\{s, t\}}$  (pour l'ordre partiel  $\prec$ ). Si ces deux points ont des étiquettes différentes (l'un est étiqueté  $s$  et l'autre est étiqueté  $t$ ), alors on ajoute une nouvelle relation  $b \prec_c a$ .

EXEMPLE 5.5. Pour le diagramme de Coxeter linéaire simplement lacé avec 7 générateurs, considérons le mot  $\mathbf{w} = s_2 s_1 s_0 s_6 s_5 s_3 s_2 s_4 s_5 s_3 s_6$ . L'empilement  $H_{\mathbf{w}}$  et sa clôture cylindrique  $H_{\mathbf{w}}^c$  sont représentés dans la Figure 2.2.

REMARQUE 5.6. La clôture cylindrique  $H^c$  ne forme (en général) pas un poset, même si nous étendons la relation  $\prec_c$  par transitivité. En effet, dans ce cas, des points de  $H^c$  pourraient être en relation avec eux-mêmes.

La définition suivante étend naturellement la définition des isomorphismes de posets aux clôtures cylindriques.

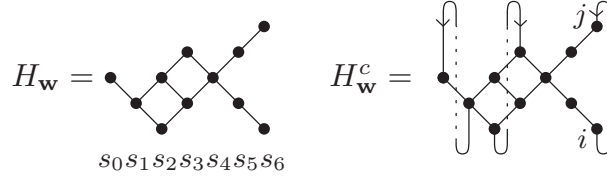


FIGURE 2.2. Un empilement et sa clôture cylindrique. Les arêtes orientées en pointillés correspondent aux nouvelles relations que nous avons ajoutées dans la définition de  $H_w^c$ . L'orientation indique que chaque point  $i$  en bas et chaque point  $j$  en haut reliés par une arête satisfont  $j \prec_c i$ .

DÉFINITION 5.7. Soient  $H_1^c$  et  $H_2^c$  deux clôtures cylindriques. Ces deux clôtures cylindriques sont *isomorphes* s'il existe une bijection  $f : H_1^c \mapsto H_2^c$  qui préserve l'étiquetage et la relation  $\prec_c$ , c'est-à-dire que si on note  $a_i$  (respectivement  $b_i$ ) l'étiquetage du point  $i$  dans  $H_1^c$  (respectivement  $H_2^c$ ), alors  $a_i = b_{f(i)}$ ; et que si  $i$  et  $j$  sont deux points de  $H_1^c$ , alors  $i \prec_c j \Leftrightarrow f(i) \prec_c f(j)$ .

LEMME 5.8. Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux empilements. Si il existe un isomorphisme  $\varphi$  de posets préservant l'étiquetage entre  $H_1$  et  $H_2$ , alors  $\varphi$  est aussi un isomorphisme entre  $H_1^c$  et  $H_2^c$ .

DÉMONSTRATION. L'isomorphisme de posets  $\varphi$  préserve les notions de maximalité et minimalité d'un point, ainsi que l'étiquetage et les relations de couverture de chaîne. On vérifie donc grâce à la définition des clôtures cylindriques que  $\varphi$  préserve aussi la relation  $\prec_c$  entre  $H_1^c$  et  $H_2^c$ .  $\square$

Comme  $H^c$  n'est pas un poset, on ne peut pas dessiner son diagramme de Hasse. Néanmoins, de manière analogue, on définit le *diagramme* de  $H^c$  comme étant le diagramme de Hasse de  $H$ , auquel on ajoute des arêtes orientées représentant les nouvelles relations décrites dans la Définition 5.4.

Nous allons maintenant expliquer le nom de clôture cylindrique. Considérons le système de Coxeter  $(W, S)$  correspondant au diagramme de Coxeter linéaire  $\Gamma_n$  décrit dans la Figure 2.3. Le diagramme de  $H^c$  peut (et doit) être considéré comme étant tracé sur un cylindre, contrairement aux diagrammes de Hasse des empilements de  $W$  qui sont planaires. Sur ce cylindre, chaque chaîne  $H_s$  pour un générateur  $s$  peut être vue comme étant un cercle.

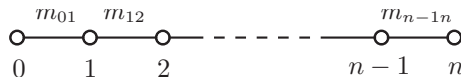


FIGURE 2.3. Le diagramme de Coxeter linéaire.

Si  $H^c$  est la clôture cylindrique d'un empilement, alors la *taille*  $|H^c|$  est le cardinal de l'ensemble de ses points. Étant donné un sous-ensemble  $I \subset S$ , nous écrivons  $H_I^c$  pour l'ensemble des points de  $H^c$  dont l'étiquette est dans  $I$ . Contrairement à la définition du poset  $H_I$ , l'ensemble  $H_I^c$  ne contient pas les relations  $\prec_c$  entre ces points (la raison en est encore une fois que l'on ne peut pas étendre cette relation par transitivité).

La proposition suivante illustre pourquoi la notion de clôture cylindrique est pertinente dans l'étude des éléments CPC.

PROPOSITION 5.9. *Soient  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  deux mots. Si le mot  $\mathbf{w}_2$  est équivalent à commutation près à un décalage cyclique du mot  $\mathbf{w}_1$ , alors  $H_{\mathbf{w}_1}^c$  et  $H_{\mathbf{w}_2}^c$  sont isomorphes au sens de la Définition 5.7.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathbf{w}_3$  le mot équivalent à commutation près à  $\mathbf{w}_2$  et tel que  $\mathbf{w}_3$  soit un décalage cyclique de  $\mathbf{w}_1$ . L'empilement  $H_{\mathbf{w}_3}$  de  $\mathbf{w}_3$  est isomorphe à l'empilement  $H_{\mathbf{w}_2}$  de  $\mathbf{w}_2$  d'après [77, Proposition 2.2]. Le Lemme 5.8 nous assure alors qu'il existe un isomorphisme entre  $H_{\mathbf{w}_2}^c$  et  $H_{\mathbf{w}_3}^c$  préservant l'étiquetage et la relation  $\prec_c$ . Il nous suffit donc de montrer que  $H_{\mathbf{w}_1}^c$  et  $H_{\mathbf{w}_3}^c$  sont isomorphes pour montrer la proposition.

Nous supposons tout d'abord que  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_3$  ne diffèrent que d'un décalage cyclique gauche, et nous écrivons  $\mathbf{w}_1 = s\mathbf{w}$  et  $\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}s$ , avec un générateur  $s \in S$  et  $\mathbf{w}$  une expression. Nous montrons que la permutation circulaire  $f := (\ell, \ell - 1, \dots, 2, 1)$ , où  $\ell > 1$  est le nombre de générateurs composant le mot  $\mathbf{w}_1$ , est un isomorphisme entre  $H_{\mathbf{w}_1}^c = H_{s\mathbf{w}}^c$  et  $H_{\mathbf{w}_3}^c = H_{\mathbf{w}s}^c$ .

Le fait que  $f$  soit une bijection est immédiat. Montrons que  $f$  préserve l'étiquetage. Soit  $i$  un entier compris entre 1 et  $\ell$ , nous notons  $a_i$  l'étiquetage du point  $i$  dans  $H_{\mathbf{w}_1}^c$  et  $b_i$  l'étiquetage du point  $i$  dans  $H_{\mathbf{w}_3}^c$ . On veut montrer que  $b_{f(i)} = a_i$ . On distingue deux cas. Si  $i = 1$ , alors  $a_i = s$ . On a  $f(i) = \ell$  par définition de  $f$ , et  $b_{f(i)} = b_\ell = s$ . Si  $i \neq 1$ , on a  $f(i) = i - 1$ . Or  $H_{\mathbf{w}_1}^c = H_{s\mathbf{w}}^c$  et  $H_{\mathbf{w}_1}^c = H_{\mathbf{w}s}^c$  implique que l'on ait  $a_i = b_{i-1}$ . Donc  $b_{f(i)} = a_i$ .

Montrons maintenant que  $f$  préserve la relation  $\prec_c$ , c'est-à-dire que si  $1 \leq i, j \leq \ell$  sont deux points de  $H_{\mathbf{w}_1}^c$ , on a  $i \prec_c j \Leftrightarrow f(i) \prec_c f(j)$ . Si  $i = j$ , la relation  $i \prec_c i$  n'est pas vérifiée dans  $H_{\mathbf{w}_1}^c$ , et la relation  $f(i) \prec_c i$  n'est pas vérifiée dans  $H_{\mathbf{w}_3}^c$ . Sinon, nous montrons tout d'abord le sens direct. Soient  $1 \leq i, j \leq \ell$  deux points distincts de  $H_{\mathbf{w}_1}^c$  tels que  $i \prec_c j$ . Supposons que  $i = 1$ . On a alors  $f(1) = \ell$  et  $f(j) = j - 1$ . La relation  $1 \prec_c j$  est nécessairement vérifiée dans  $H_{\mathbf{w}_1}$ , car lors de la construction de  $H_{\mathbf{w}_1}$ , on n'ajoute que des relations de la forme  $j' \prec_c i'$  avec  $i' < j'$ . Deux cas sont à distinguer suivant si 1 et  $j$  ont la même étiquette ou non.

- Si 1 et  $j$  ont la même étiquette, la définition des relations de couverture de chaîne nous assure que  $j$  correspond à la première occurrence de  $s$  dans  $\mathbf{w}$ , et qu'il n'y a pas de générateur qui ne commute pas avec  $s$  et qui apparait avant cette occurrence de  $s$  dans  $\mathbf{w}$ . On en déduit donc que le point  $j - 1$  de  $H_{\mathbf{w}_3}$  a pour étiquette  $s$  et est minimal dans  $H_{\mathbf{w}_3}$ . Comme d'autre part, le point  $\ell$  a pour étiquette  $s$  et est maximal dans  $H_{\mathbf{w}_3}$ , l'étape (i) de la Définition 5.4 de  $H_{\mathbf{w}_3}^c$  nous assure que la relation  $\ell \prec_c j - 1$  est dans  $H_{\mathbf{w}_3}^c$ , et donc qu'on a  $f(1) \prec_c f(j)$ .
- Si 1 et  $j$  n'ont pas la même étiquette, alors par définition des relations de couvertures de chaîne,  $j$  est minimal dans  $H_{\mathbf{w}_1}$  parmi tous les points qui ont la même étiquette que lui. Ainsi,  $j - 1$  est aussi minimal dans  $H_{\mathbf{w}_3}$  parmi tous les points qui ont la même étiquette que lui. Comme  $\ell$  est maximal parmi tous les points de  $H_{\mathbf{w}_3}$  qui ont  $s$  comme étiquette, l'étape (ii) de la Définition 5.4 de  $H_{\mathbf{w}_3}^c$  nous assure que la relation  $\ell \prec_c j - 1$  est dans  $H_{\mathbf{w}_3}^c$ , et donc qu'on a  $f(1) \prec_c f(j)$ .

Supposons maintenant que  $j = 1$ . On a  $f(i) = i - 1$  et  $f(1) = \ell$ . La relation  $i \prec_c 1$  n'est pas vérifiée dans  $H_{\mathbf{w}_1}$  car  $i > 1$ . Cette relation a donc été ajoutée dans  $H_{\mathbf{w}_1}^c$  lors de l'étape (i) ou (ii) de la Définition 5.4 de  $H_{\mathbf{w}_1}^c$ . On distingue donc deux cas suivant l'étiquette de  $i$ .

- Si  $i$  a  $s$  comme étiquette, alors on en déduit que  $i$  est maximal dans  $H_{\mathbf{w}_1}$ , et donc que  $i - 1$  est maximal dans  $H_{\mathbf{w}}$ . On en déduit l'existence d'une relation de couverture de chaîne entre les deux dernières occurrences de  $s$  dans  $H_{\mathbf{w}_3}$  c'est-à-dire que l'on a  $f(i) = i - 1 \prec_c \ell = f(1)$  dans  $H_{\mathbf{w}s} = H_{\mathbf{w}_3}$ , donc aussi dans  $H_{\mathbf{w}_3}^c$ .
- Si  $i$  a une étiquette différente de  $s$ , alors cette étiquette ne commute pas avec  $s$ ; et  $i$  est maximal dans  $H_{s\mathbf{w}}$  parmi les points qui ont cette étiquette. Cela nous assure que la relation  $f(i) \prec_c f(1)$  est vérifiée dans  $H_{\mathbf{w}s}$ , et donc aussi dans  $H_{\mathbf{w}s}^c = H_{\mathbf{w}_3}^c$ .

Enfin, si ni  $i$  ni  $j$  n'est égal à 1, on vérifie immédiatement que la relation  $i - 1 \prec_c j - 1$  est vérifiée dans  $H_{\mathbf{w}_3}^c$ . Ceci termine la preuve du sens direct  $i \prec_c j \Rightarrow f(i) \prec_c f(j)$ .

Pour montrer le sens indirect, les mêmes distinctions de cas sur  $f(i)$  et  $f(j)$  et les mêmes arguments s'appliquent, on ne détaille donc pas plus ici. Ceci montre que  $f$  est bien un isomorphisme entre  $H_{\mathbf{w}_1}^c$  et  $H_{\mathbf{w}_3}^c$ .

Finalement, si  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_3$  diffèrent de plus d'un décalage cyclique gauche, nous écrivons  $\mathbf{w}_1 = s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_\ell}$  et  $\mathbf{w}_3 = s_{a_k}s_{a_{k+1}}\cdots s_{a_{k-1}}$  avec  $k \in \{2, \dots, \ell\}$ . En utilisant ce qui précède, on montre successivement que les clôtures cylindriques  $H_{\mathbf{w}_1}^c = H_{s_{a_1}s_{a_2}\cdots s_{a_\ell}}^c$ ,  $H_{s_{a_2}s_{a_3}\cdots s_{a_1}}^c$ ,  $\dots$ ,  $H_{s_{a_k}\cdots s_{a_{k-1}}}^c = H_{\mathbf{w}_3}^c$  sont toutes isomorphes. □

Désormais, notre but est de caractériser les éléments CPC en termes de clôtures cylindriques d'empilements. Pour cela, nous avons besoin de définir l'analogue d'une chaîne et d'une chaîne convexe dans un empilement pour les clôtures cylindriques.

**DÉFINITION 5.10.** Soient  $H$  un empilement et  $H^c$  sa clôture cylindrique. Soit  $m$  un entier strictement positif et soient  $i_1, i_2, \dots, i_m$  des entiers. On dit que  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_m$  est une  $c$ -chaîne dans  $H^c$  si les relations  $i_k \prec_c i_{k+1}$  sont dans  $H^c$  pour tous  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ . La *longueur* de cette  $c$ -chaîne est  $m$ . Une  $c$ -chaîne est *propre* si tous les entiers  $i_j$  sont distincts.

Une illustration est fournie dans la Figure 2.4.

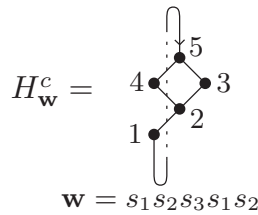


FIGURE 2.4. Dans  $H_{\mathbf{w}}^c$ ,  $1 \prec_c 2 \prec_c 4 \prec_c 5$  et  $4 \prec_c 5 \prec_c 1 \prec_c 2$  sont deux  $c$ -chaînes propres distinctes de longueur 4, bien qu'elles soient composées des mêmes points.

**DÉFINITION 5.11.** Soit  $H$  un empilement et soient  $s, t$  deux générateurs tels que  $m_{st} \geq 3$ . Considérons une  $c$ -chaîne propre  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_m$  dans  $H^c$  avec  $m \geq 3$  telle que  $s_{a_{i_1}} = s_{a_{i_3}} = \dots = s$  et  $s_{a_{i_2}} = s_{a_{i_4}} = \dots = t$  (ici  $m$  n'est pas nécessairement égal à  $m_{st}$ ). Une telle  $c$ -chaîne est *cylindrique convexe* si les seules  $c$ -chaînes propres  $i_1 \prec_c u_1 \prec_c \dots \prec_c u_d \prec_c i_m$  dans  $H^c$  sont telles que pour tout  $\ell \in \{1, \dots, d\}$ , on a  $u_\ell \in \{i_2, \dots, i_{m-1}\}$ .



EXEMPLE 5.12. Dans la clôture cylindrique de la Figure 2.4, la  $c$ -chaîne propre  $1 \prec_c 2 \prec_c 4 \prec_c 5$  n'est pas cylindrique convexe car on a aussi  $1 \prec_c 2 \prec_c 3 \prec_c 5$ . La  $c$ -chaîne propre  $4 \prec_c 5 \prec_c 1 \prec_c 2$  est cylindrique convexe.

Dans la suite, nous prouvons le lemme suivant, qui montre que les  $c$ -chaînes cylindriques convexes étendent naturellement aux clôtures cylindriques la notion de chaîne convexe d'un empilement.

LEMME 5.13. *Supposons qu'il existe une chaîne convexe  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_m$  de longueur  $m \geq 3$  dans un empilement  $H$ , telle que tous les points  $i_j$  soient distincts, et que  $s_{a_{i_1}} = s_{a_{i_3}} = \dots = s$  et  $s_{a_{i_2}} = s_{a_{i_4}} = \dots = t$ . Alors cette chaîne, considérée en tant que  $c$ -chaîne (nécessairement propre), est cylindrique convexe dans  $H^c$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_m$  une telle chaîne convexe dans  $H$ . Supposons par l'absurde qu'il y ait une  $c$ -chaîne propre  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_k \prec_c u_1 \prec_c \dots \prec_c u_d \prec_c i_m$  dans  $H^c$ , pour un entier  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ , avec  $u_1 \neq i_{k+1}$ . Deux cas peuvent se produire :

Cas 1.  $i_k \neq i_{m-1}$  : comme  $i_k$  n'est pas un point maximal (dans  $H$ ) parmi tous les points ayant  $a_{i_k}$  comme étiquette (c'est-à-dire que  $i_k$  n'est pas maximal dans  $H_{s_{a_{i_k}}}$ ), la relation  $i_k \prec_c u_1$  est présente dans  $H$ . En conséquence, la relation  $i_k \prec_c u_1 \prec_c i_{k+2}$  est aussi présente dans  $H$ . Donc  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_m$  n'est pas une chaîne convexe dans  $H$ , ce qui est une contradiction.

Cas 2.  $i_k = i_{m-1}$  : comme  $i_m$  n'est pas un point minimal parmi les points ayant  $a_{i_m}$  comme étiquette (c'est-à-dire que  $i_m$  n'est pas minimal dans  $H_{s_{a_{i_m}}}$ ), la relation  $u_d \prec_c i_m$  est dans  $H$ . Ainsi la relation  $i_{m-2} \prec_c u_d \prec_c i_m$  est aussi dans  $H$ . Comme la  $c$ -chaîne  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_k \prec_c u_1 \prec_c \dots \prec_c u_d \prec_c i_m$  est propre, nous avons  $u_d \neq i_{m-1}$ . Ainsi  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_m$  n'est pas une chaîne convexe dans  $H$ , ce qui est une contradiction. □

Le résultat suivant étend la caractérisation de Stembridge de la Proposition 5.3 aux éléments CPC en termes de clôtures cylindriques. Ce théorème est le but principal de ce paragraphe, et sera utile dans les sections suivantes pour énumérer les éléments CPC.

THÉORÈME 5.14. *Un empilement  $H$  est l'empilement d'un mot  $\mathbf{w}$  correspondant à un élément CPC  $w$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *il n'y a pas de  $c$ -chaîne cylindrique convexe  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_{m_{st}}$  dans la clôture cylindrique  $H^c$  telle que  $s_{a_{i_1}} = s_{a_{i_3}} = \dots = s$  et  $s_{a_{i_2}} = s_{a_{i_4}} = \dots = t$ , où  $3 \leq m_{st} < \infty$  ;*
- (ii) *il n'y a pas de relation de couverture de chaîne  $i \prec_c j$  dans la clôture cylindrique  $H^c$  telle que  $s_{a_i} = s_{a_j}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathbf{w}$  un mot et soit  $H := H_{\mathbf{w}}$  son empilement associé. Supposons que  $\mathbf{w}$  est un mot réduit d'un élément non CPC. Il existe alors par la Définition 5.1 un décalage cyclique de  $\mathbf{w}$  qui est équivalent à commutation près à  $\mathbf{w}' = w_1 s s w_2$  ou à  $\mathbf{w}' = w_1 \underbrace{st \dots st}_{m_{st}} w_2$ .

Soit  $H_1$  l'empilement de  $\mathbf{w}'$ . D'après la Proposition 5.3, dans le premier cas,  $H_1$  contient une relation de couverture de chaîne  $i \prec_c j$  telle que  $s_{a_i} = s_{a_j} = s$ , et dans le second cas,  $H_1$  contient une chaîne convexe  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_{m_{st}}$  telle que

$s_{a_{i_1}} = s_{a_{i_3}} = \dots = s$  et  $s_{a_{i_2}} = s_{a_{i_4}} = \dots = t$ , où  $3 \leq m_{st} < \infty$ . Par le Lemme 5.13, ces deux cas donnent respectivement une relation de couverture de chaîne dans  $H_1^c$  satisfaisant (ii) et une c-chaîne cylindrique convexe dans  $H_1^c$  satisfaisant (i). Mais  $\mathbf{w}'$  est équivalent à commutation près à un décalage cyclique de  $\mathbf{w}$ , donc il existe un isomorphisme entre la clôture cylindrique  $H^c$  et la clôture cylindrique  $H_1^c$ , comme cela a été vu dans la Proposition 5.9. Cet isomorphisme préserve les c-chaînes cylindriques convexes, ce qui clôt la démonstration.

Réciproquement, si  $H^c$  contient la c-chaîne cylindrique convexe  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_{m_{st}}$ , soit  $\mathbf{w}'$  le décalage cyclique de  $\mathbf{w}$  commençant par  $s_{a_{i_1}}$ , et soit  $H_1$  son empilement associé. Comme tous les points composant la c-chaîne cylindrique convexe sont distincts par définition,  $H_1$  contient la chaîne convexe  $i_1 \prec_c \dots \prec_c i_{m_{st}}$ . Ainsi  $H_1$  ne correspond pas à un élément pleinement commutatif d'après la Proposition 5.3 et  $H$  n'est pas l'empilement d'un élément CPC. Le même argument reste aussi valable si  $H^c$  contient une relation  $i \prec_c j$  telle que  $s_{a_i} = s_{a_j}$ , en considérant cette fois le mot  $\mathbf{w}'$  qui est un décalage cyclique de  $\mathbf{w}$  commençant par  $s_{a_i}$ .  $\square$

Par exemple, ce théorème nous assure que l'empilement  $H$  de la Figure 2.2 ne correspond pas à un élément CPC, car sa clôture cylindrique  $H^c$  contient une relation de couverture de chaîne  $i \prec_c j$  telle que  $s_{a_i} = s_{a_j} = s_6$ . L'exemple de la Figure 2.5 correspond à un élément CPC, d'après le Théorème 5.14.

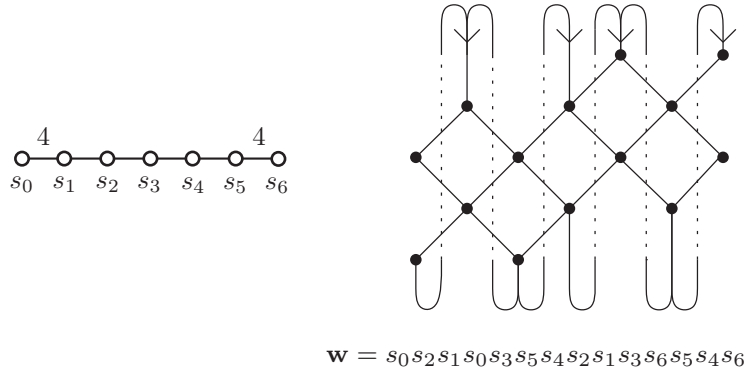


FIGURE 2.5. Une expression réduite d'un élément CPC en type  $\tilde{C}_6$ , et la clôture cylindrique de son empilement.

Avant de terminer cette section, nous introduisons un sous-ensemble spécifique des éléments CPC, et nous rappelons la définition des mots alternants, qui a été originellement donnée dans [7], et qui sera utile par la suite.

LEMME 5.15. *Soit  $W$  un groupe de Coxeter. Les mots dans lesquels chaque générateur n'apparaît qu'au plus une fois sont des décompositions réduites d'éléments CPC de  $W$ .*

DÉMONSTRATION. Comme chaque générateur n'apparaît qu'au plus une fois, on ne peut pas utiliser de relation de tresse de longueur au moins 3.  $\square$

Ce lemme justifie pourquoi ce sous-ensemble sera traité séparément des autres éléments CPC dans le reste de ce chapitre.

DÉFINITION 5.16. Dans un groupe de Coxeter avec un diagramme de Coxeter linéaire  $\Gamma_n$ , un mot réduit est appelé *alternant* si pour tout  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , les occurrences de  $s_i$  alternent avec celles de  $s_{i+1}$ . Un empilement est dit *alternant* si c'est l'empilement d'un mot alternant. Si le groupe de Coxeter est de type  $\tilde{A}_{n-1}$  (voir Figure 3.1 pour le diagramme de Coxeter associé), le diagramme n'est pas linéaire mais on définit les mots alternants de la même manière en posant  $s_n := s_0$ .

Par exemple, le mot  $s_3s_2s_4s_1s_3s_2s_4$  est un mot alternant en type  $A_4$  mais n'est pas un mot alternant en type  $A_5$ .

### 3. Les types $\tilde{A}$ et $A$

Dans cette section, nous donnons une caractérisation et effectuons l'énumération des éléments CPC dans les deux types  $A_{n-1}$  et  $\tilde{A}_{n-1}$ . Les diagrammes de Coxeter sont donnés dans la Figure 3.1.

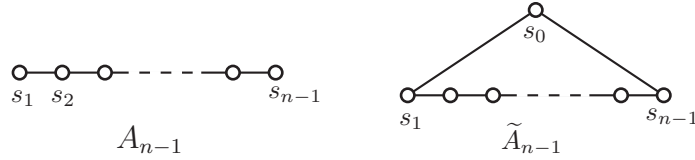


FIGURE 3.1. Les diagrammes de Coxeter des types  $A_{n-1}$  et  $\tilde{A}_{n-1}$ .

Les éléments de  $A_{n-1}^{CPC}$  ont été énumérés dans [9] en utilisant des relations de récurrence. Notre caractérisation en termes de clôtures cylindriques nous permet de raffiner cette énumération en prenant en compte la longueur de Coxeter des éléments. Ainsi, nous pouvons calculer la série génératrice

$$W^{CPC}(q) := \sum_{w \in W^{CPC}} q^{\ell(w)}$$

pour  $W = A_{n-1}$  et  $W = \tilde{A}_{n-1}$ . En particulier, quand  $q = 1$  et  $W = A_{n-1}$ , nous retrouvons l'énumération de [9] (rappelons que le nombre d'éléments CPC en type  $\tilde{A}_{n-1}$  est infini). Notre stratégie est la suivante : premièrement, nous obtenons une caractérisation des éléments CPC en type  $\tilde{A}_{n-1}$ , nous en déduisons une caractérisation des éléments CPC en type  $A_{n-1}$ , ensuite nous en déduisons l'énumération de ces éléments en type  $A_{n-1}$ , ce qui nous permettra enfin d'effectuer l'énumération en type  $\tilde{A}_{n-1}$ .

**3.1. Caractérisation en type  $\tilde{A}_{n-1}$ .** Notons que, dans ce type, le diagramme de la clôture cylindrique d'un empilement peut être vu comme étant dessiné sur un tore.

THÉORÈME 5.17. Soit  $n \geq 3$  un entier. Un élément  $w$  du groupe de Coxeter de type  $\tilde{A}_{n-1}$  est CPC si et seulement si une (ou de façon équivalente, chacune) de ses décompositions réduites  $\mathbf{w}$  vérifie une des deux conditions suivantes :

- (a) chaque générateur a au plus une occurrence dans  $\mathbf{w}$ , ou
- (b)  $\mathbf{w}$  est un mot alternant et  $|\mathbf{w}_{s_0}| = |\mathbf{w}_{s_1}| = \dots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| \geq 2$ .

DÉMONSTRATION. Nous prouvons tout d'abord le sens indirect. Comme mentionné dans le Lemme 5.15, si chaque générateur apparaît au plus une fois dans  $\mathbf{w}$ , alors  $w$  est un élément CPC. Soit donc  $\mathbf{w}$  une expression réduite d'un élément

CPC  $w$ , telle qu'un générateur apparait au moins deux fois dans  $\mathbf{w}$ . Rappelons que d'après [7, Proposition 2.1],  $w \in \tilde{A}_{n-1}$  est pleinement commutatif si et seulement si  $\mathbf{w}$  est un mot alternant. Soit  $s_j$  un générateur qui apparait au moins deux fois dans  $\mathbf{w}$  et tel que pour tous les  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $|\mathbf{w}_{s_j}| \geq |\mathbf{w}_{s_k}|$ . Nous allons prouver que  $|\mathbf{w}_{s_j}| = |\mathbf{w}_{s_{j+1}}|$ , où nous avons posé  $s_n = s_0$ , ce qui est suffisant pour montrer que chaque générateur apparait le même nombre de fois dans  $\mathbf{w}$ . Comme  $\mathbf{w}$  est alternant, il y a trois possibilités :

Cas 1.  $|\mathbf{w}_{s_j}| = |\mathbf{w}_{s_{j+1}}| - 1$ . Cela contredit la maximalité de  $|\mathbf{w}_{s_j}|$ .

Cas 2.  $|\mathbf{w}_{s_j}| = |\mathbf{w}_{s_{j+1}}| + 1$ . Par maximalité de  $|\mathbf{w}_{s_j}|$ , il y a deux possibilités pour  $H_{\mathbf{w}}^c$  : ou bien  $|\mathbf{w}_{s_j}| = |\mathbf{w}_{s_{j-1}}|$ , ou bien  $|\mathbf{w}_{s_j}| = |\mathbf{w}_{s_{j-1}}| + 1$ . On obtient alors dans  $H_{\mathbf{w}}^c$  ou bien une c-chaîne cylindrique convexe  $x \prec_c y \prec_c z$  où  $x$  et  $z$  ont  $s_j$  comme étiquette et  $y$  a  $s_{j-1}$  comme étiquette, ou bien une relation de couverture de chaîne entre deux entiers  $p$  et  $q$  qui ont  $s_j$  comme étiquette. Ainsi  $w$  n'est pas un élément CPC d'après le Théorème 5.14 (voir la Figure 3.2, où nous avons encerclé les points  $x, y, z$ ; et  $p, q$ , respectivement).

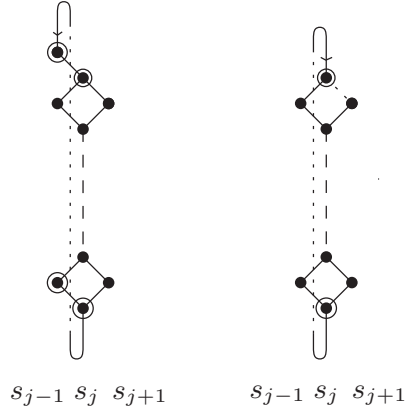


FIGURE 3.2. Les deux clôtures cylindriques possibles dans le cas 2.

Cas 3.  $|\mathbf{w}_{s_j}| = |\mathbf{w}_{s_{j+1}}|$  ce qui est la condition recherchée.

Réciproquement, soit  $\mathbf{w}$  un mot alternant tel que  $|\mathbf{w}_{s_0}| = |\mathbf{w}_{s_1}| = \dots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| \geq 2$ . La clôture cylindrique de  $H_{\mathbf{w}}^c$  ne peut pas contenir une c-chaîne cylindrique convexe  $x \prec_c y \prec_c z$  de longueur 3 telle que  $s_{a_x} = s_{a_z} = s_m$  et  $s_{a_y} = s_{m+1}$  (respectivement  $s_{m-1}$ ) : en effet, la condition sur  $\mathbf{w}$  impliquerait qu'il existe un entier  $\ell$  tel que  $x \prec_c \ell \prec_c z$  avec  $s_{a_\ell} = s_{m-1}$  (respectivement  $s_{m+1}$ ), ce qui est en contradiction avec la convexité cylindrique de la c-chaîne. Le même argument est toujours valable pour les relations de couvertures de chaînes impliquant des entiers ayant la même étiquette.  $\square$

**3.2. Caractérisation et énumération en type  $A_{n-1}$ .** Dans ce type, nous allons à la fois caractériser les éléments CPC et calculer la fonction génératrice

$$A^{CPC}(x) := \sum_{n \geq 1} A_{n-1}^{CPC}(q) x^n.$$

Nous commençons par un lemme qui est une conséquence du Corollaire 5.6 dans [9]. Néanmoins, nous en donnons ici une preuve alternative plus courte utilisant le Théorème 5.17.

LEMME 5.18. *Soit  $n \geq 3$  un entier. Les éléments CPC en type  $A_{n-1}$  sont ceux ayant des décompositions réduites dans lesquelles chaque générateur n'apparaît qu'au plus une fois.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathbf{w}$  un mot réduit d'un élément CPC en type  $A_{n-1}$ . Par définition des diagrammes de Coxeter (voir Figure 3.1), c'est aussi le mot réduit d'un élément CPC en type  $\tilde{A}_{n-1}$  dans lequel le générateur  $s_0$  n'apparaît pas. Selon le Théorème 5.17, les seuls tels éléments de  $\tilde{A}_{n-1}$  sont ceux dans lesquels chaque générateur autre que  $s_0$  apparaît au plus une fois et  $s_0$  n'apparaît pas.

Réciproquement, si tous les générateurs n'apparaissent qu'au plus une fois dans  $\mathbf{w}$ , le Lemme 5.15 nous assure que  $\mathbf{w}$  est alors la décomposition réduite d'un élément CPC.  $\square$

THÉOREME 5.19. *On a  $A_0^{CPC}(q) = 1$ ,  $A_1^{CPC}(q) = 1 + q$  et pour  $n \geq 2$ ,*

$$(130) \quad A_{n-1}^{CPC}(q) = (2q + 1)A_{n-2}^{CPC}(q) - qA_{n-3}^{CPC}(q).$$

*De manière équivalente, on a l'expression suivante pour la série génératrice :*

$$A^{CPC}(x) = x \frac{1 - qx}{1 - (2q + 1)x + qx^2}.$$

DÉMONSTRATION. Selon [7, Proposition 2.7], les éléments PC en type  $A_{n-1}$  sont en bijection avec des chemins de type Motzkin de longueur  $n$ , ayant leurs points de départ et d'arrivée à hauteur 0, tels que les pas horizontaux sont étiquetés par L ou R (et les pas horizontaux à hauteur 0 sont toujours étiquetés R). Nous rappelons ici la bijection, qui est définie comme suit : soit  $w$  un élément PC dans  $A_{n-1}$ , fixons  $\mathbf{w}$  une de ses décompositions réduites et  $H$  son empilement. A chaque générateur  $s_i \in S$ , nous associons un point  $P_i = (i, |H_{s_i}|)$ . Comme  $\mathbf{w}$  est alternant, trois cas peuvent se produire :

- Cas 1.  $|H_{s_i}| = |H_{s_{i+1}}| - 1$ , ce qui correspond à un pas ascendant dans le chemin.
- Cas 2.  $|H_{s_i}| = |H_{s_{i+1}}| + 1$ , ce qui correspond à un pas descendant dans le chemin.
- Cas 3.  $|H_{s_i}| = |H_{s_{i+1}}|$ , correspondant à un pas horizontal, que l'on étiquette R si  $s_i$  apparaît avant  $s_{i+1}$  dans  $\mathbf{w}$  ou si  $|H_{s_i}| = 0$ , et que l'on étiquette L sinon. (Notons que rien ne dépend ici du choix de la décomposition réduite  $\mathbf{w}$  car  $w$  est pleinement commutatif.)

D'après le Lemme 5.18, la restriction de cette bijection aux éléments CPC est une bijection entre ces éléments et les chemins de type Motzkin définis ci-dessus de longueur  $n$ , avec une restriction supplémentaire : la hauteur du chemin ne doit jamais excéder 1. En prenant en compte le premier retour du chemin sur l'axe des abscisses à l'abscisse  $m$  (voir Figure 3.3 pour un exemple), nous obtenons la relation de récurrence suivante pour  $n \geq 3$  :

$$(131) \quad A_{n-1}^{CPC}(q) = A_{n-2}^{CPC}(q) + \sum_{m=2}^n 2^{m-2} q^{m-1} A_{n-1-m}^{CPC}(q),$$

où nous posons  $A_{-1}^{CPC}(q) = 1$  (ce qui est en accord avec  $A_0^{CPC}(q) = 1$ ,  $A_1^{CPC}(q) = 1 + q$  et la relation de récurrence attendue (130)).

Réécrire (131) avec  $n$  remplacé par  $n - 1$  donne :

$$(132) \quad A_{n-2}^{CPC}(q) = A_{n-3}^{CPC}(q) + \sum_{m=2}^{n-1} 2^{m-2} q^{m-1} A_{n-2-m}^{CPC}(q).$$

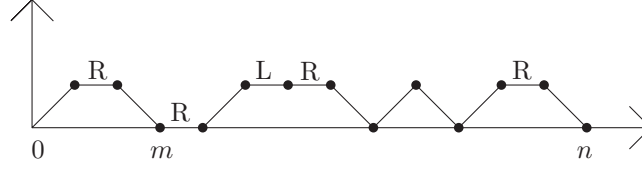


FIGURE 3.3. Le chemin de Motzkin correspondant à l'expression réduite  $s_1 s_2 s_6 s_5 s_7 s_9 s_{11} s_{12}$  en type  $A_{12}$ . Ici, on a  $m = 3$ .

Multiplier ceci par  $2q$  et soustraire le résultat à (131) nous permet d'éliminer la somme sur  $m$ , et conduit à

$$(133) \quad A_{n-1}^{CPC}(q) - 2qA_{n-2}^{CPC}(q) = A_{n-2}^{CPC}(q) - qA_{n-3}^{CPC}(q),$$

ce qui est équivalent à (130).

Les techniques classiques en théorie des fonctions génératrices et les valeurs  $A_0^{CPC}(q) = 1$ ,  $A_1^{CPC}(q) = 1 + q$  nous permettent de calculer à partir de (130) la fonction génératrice désirée.  $\square$

Notons que, comme il était attendu, si  $q \rightarrow 1$ , nous retrouvons la série génératrice (ou la relation de récurrence) des nombres de Fibonacci d'indices impairs de [9]. Ce  $q$ -analogue était déjà connu : la suite A105306 dans [72] énumère les permutations qui évitent les deux motifs 321 et 3412, ce qui correspond exactement aux permutations telles que dans une décomposition réduite, tous les générateurs n'apparaissent qu'au plus une fois.

**3.3. Énumération en type  $\tilde{A}_{n-1}$ .** Nous énumérons ici les éléments CPC en type  $\tilde{A}_{n-1}$  selon leur longueur. Comme dans le cas des éléments PC (voir [7, 29]), les coefficients de la série génératrice associée sont ultimement périodiques.

PROPOSITION 5.20. *On a pour  $n \geq 3$*

$$(134) \quad \tilde{A}_{n-1}^{CPC}(q) = P_{n-1}(q) + \frac{2^n - 2}{1 - q^n} q^{2n},$$

où  $P_{n-1}(q)$  est un polynôme de degré  $n$  satisfaisant pour  $n \geq 4$  :

$$(135) \quad P_n(q) = (3q + 1)P_{n-1}(q) - (2q + 2q^2)P_{n-2}(q) + q^2P_{n-3}(q),$$

avec  $P_1(q) = 1 + 2q + 2q^2$ ,  $P_2(q) = 1 + 3q + 6q^2 + 6q^3$ , et  $P_3(q) = 1 + 4q + 10q^2 + 16q^3 + 14q^4$ . De plus, nous pouvons calculer la série génératrice :

$$P(x) := \sum_{n=1}^{\infty} P_n(q)x^n = \frac{x(1 + 2q + 2q^2 - (2q + 2q^2)x + q^2x^2)}{(1 - qx)(1 - (2q + 1)x + qx^2)}.$$

De ce fait, les coefficients (en  $q$ ) de  $\tilde{A}_{n-1}^{CPC}(q)$  sont ultimement périodiques de période exacte  $n$ , et la périodicité commence à partir de la longueur  $n$ .

DÉMONSTRATION. De manière similaire au cas du type fini  $A_{n-1}$  (voir [7, Proposition 2.1]), les éléments PC du type  $\tilde{A}_{n-1}$  sont en bijection avec les chemins de type Motzkin de longueur  $n$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) le point de départ  $P_0 = (0, |H_{s_0}|)$  et le point d'arrivée  $P_n = (n, |H_{s_n}| = |H_{s_0}|)$  ont la même hauteur,
- (ii) les pas horizontaux à hauteur 0 sont toujours étiquetés par R,
- (iii) si le chemin contient uniquement des pas horizontaux à une hauteur supérieure à 1, alors les pas ne doivent pas avoir tous la même étiquette.

La construction du chemin correspondant à un élément PC est la même que celle du type A si on pose  $s_n = s_0$ .

Dans le Théorème 5.17, les éléments CPC alternants dans lesquels tous les générateurs apparaissent au moins deux fois (et tous le même nombre de fois) correspondent aux chemins de type Motzkin qui n'ont que des pas horizontaux. Il y a donc  $2^n - 2$  chemins de ce type pour chacune des hauteurs de départ fixées  $h \geq 2$ . Cela conduit à la fonction génératrice

$$\sum_{h=2}^{+\infty} (2^n - 2)(q^n)^h,$$

qui peut être sommée pour obtenir le second terme dans le côté droit de (134).

Dans le Théorème 5.17, les éléments CPC ayant des expressions réduites avec au plus une occurrence de chaque générateur correspondent aux chemins de type Motzkin qui restent à hauteur inférieure ou égale à 1, en commençant et en s'arrêtant à la même hauteur. Nous dénotons par  $P_{n-1}(q)$  la fonction génératrice de ces éléments. Le calcul de  $P_1(q)$ ,  $P_2(q)$  et  $P_3(q)$  peut être effectué en énumérant exhaustivement tous ces chemins de Motzkin. Soit  $i$  (respectivement  $j$ ) le premier (respectivement dernier) retour (éventuel) sur l'axe des abscisses (voir la Figure 3.4 pour un exemple).

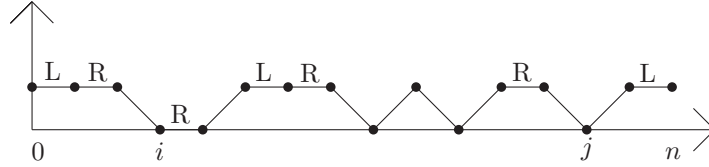


FIGURE 3.4. Le chemin de Motzkin correspondant à l'élément CPC  $s_{14}s_1s_0s_2s_6s_5s_7s_9s_{11}s_{12}$  en type  $\tilde{A}_{14}$ .

On obtient

$$(136) \quad \begin{aligned} P_{n-1}(q) &= (2^n - 2)q^n + nq^{n-1}2^{n-2} \\ &+ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 0 \text{ ou } j \neq n-1}}^{n-2} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq n-1}}^{n-1} q^{n-1+i-j} 2^{n-2+i-j} A_{j-i-1}^{CPC}(q) + A_{n-2}^{CPC}(q), \end{aligned}$$

où le premier terme compte les chemins qui restent à hauteur 1, le second terme compte les chemins tels que  $i = j$ , et le dernier terme compte les chemins tels que  $i = 0$  et  $j = n - 1$ . Réécrire (136) avec  $n - 1$  remplacé par  $n - 2$  donne

$$(137) \quad \begin{aligned} P_{n-2}(q) &= (2^{n-1} - 2)q^{n-1} + (n - 1)q^{n-2}2^{n-3} \\ &+ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 0 \text{ ou } j \neq n-2}}^{n-3} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq n-2}}^{n-2} q^{n-2+i-j} 2^{n-3+i-j} A_{j-i-1}^{CPC}(q) + A_{n-3}^{CPC}(q). \end{aligned}$$

Multiplier (137) par  $2q$  et soustraire le résultat à (136) nous permet de simplifier la double somme :

$$(138) \quad P_{n-1}(q) - 2qP_{n-2}(q) = 2q^n + 2^{n-2}q^{n-1} + A_{n-2}^{CPC}(q) + \sum_{i=2}^{n-2} 2^{i-1}q^i A_{n-2-i}^{CPC}(q).$$

La relation (131) dans le Théorème 5.19 nous permet de réécrire la somme du côté droit de (138) de la manière suivante :

$$(139) \quad \sum_{i=2}^{n-2} 2^{i-1}q^i A_{n-2-i}^{CPC}(q) = 2q (A_{n-2}^{CPC}(q) - A_{n-3}^{CPC}(q) - 2^{n-3}q^{n-2}).$$

En combinant (138) et (139), on obtient :

$$(140) \quad P_{n-1}(q) - 2qP_{n-2}(q) = 2q^n + (2q + 1)A_{n-2}^{CPC}(q) - 2qA_{n-3}^{CPC}(q),$$

qui peut être réécrit grâce à (130) sous la forme suivante :

$$(141) \quad P_{n-1}(q) = 2qP_{n-2}(q) + 2q^n + A_{n-1}^{CPC}(q) - qA_{n-3}^{CPC}(q).$$

Ensuite, on multiplie (141) par  $x^{n-1}$ . On somme sur  $n \geq 5$  et on utilise la fonction génératrice  $A^{CPC}(x)$  obtenue dans le Théorème 5.19 et les valeurs de  $P_1(q)$ ,  $P_2(q)$ ,  $P_3(q)$  pour déduire la série génératrice  $P(x)$  attendue. Comme  $P(x)$  est une fraction rationnelle, la relation de récurrence (135) pour les polynômes  $P_n$  vient directement du dénominateur de  $P(x)$ .

Maintenant, nous prouvons par récurrence sur  $n$  que  $P_{n-1}(q)$  est un polynôme en  $q$  de degré  $n$  avec coefficient dominant  $(2^n - 2)$ . C'est vrai pour  $P_1(q)$ ,  $P_2(q)$  et  $P_3(q)$ . Si  $P_{n-1}(q)$ ,  $P_{n-2}(q)$ ,  $P_{n-3}(q)$  satisfont l'hypothèse de récurrence, alors d'après (135),  $P_n(q)$  est un polynôme de degré  $n$  avec coefficient dominant  $3(2^n - 2) - 2(2^{n-1} - 2) = 2^{n+1} - 2$ .

Finalement, nous prouvons nos affirmations sur la périodicité. Le second terme du côté droit de (134) est périodique de période exacte  $n$ . En outre, à partir de la longueur  $n + 1$ , la suite de ces coefficients est de la forme

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 2^n - 2, 0, \dots, 0, 2^n - 2, 0, \dots).$$

Comme  $P_{n-1}(q)$  est un polynôme en  $q$  de degré  $n$  avec coefficient dominant  $(2^n - 2)$ , la périodicité des coefficients de  $\tilde{A}_{n-1}^{CPC}(q)$  commence au plus tard à la longueur  $n$ . Comme  $[q^{n-1}]P_{n-1}(q)$  est le nombre d'éléments CPC de longueur  $n - 1$ , il est non nul, et la périodicité commence exactement à la longueur  $n$ .  $\square$

La situation en type  $\tilde{A}_{n-1}$  est vraiment différente de celle de tous les autres types que nous étudierons dans la suite : c'est le seul cas où la série génératrice  $P_n(q)$  des éléments CPC dont les expressions réduites ont au plus une occurrence de chaque générateur ne satisfait pas la relation de récurrence  $f_n(q) = (2q + 1)f_{n-1}(q) - qf_{n-2}(q)$ .

#### 4. Les autres types finis et affines

Il y a trois autres familles infinies de groupes de Coxeter affines, qui correspondent aux types  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{D}$ . Chacun de ces groupes contient un nombre infini d'éléments cycliquement pleinement commutatifs. Dans chacun de ces cas, nous pouvons utiliser le Théorème 5.14 pour déduire une caractérisation des éléments CPC en termes d'expressions réduites, ce qui nous permet ensuite de calculer la fonction génératrice



$W^{CPC}(q) = \sum_{w \in W^{CPC}} q^{\ell(w)}$ . Nous montrons aussi que cette série génératrice est toujours ultimement périodique. Les types finis classiques  $B$  et  $D$  restants sont traités en tant que conséquences des types  $\tilde{C}$  et  $\tilde{B}$ , respectivement.

**4.1. Les types  $\tilde{C}_n$  et  $B_n$ .** Le diagramme de Coxeter du type  $\tilde{C}_n$  est représenté ci-dessous.

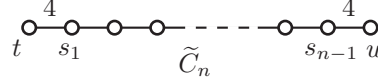


FIGURE 4.1. Le diagramme de Coxeter du type  $\tilde{C}_n$ .

Selon [7, Théorème 3.4], les empilements des éléments PC en type  $\tilde{C}$  sont classifiés en cinq familles distinctes, les empilements alternants, les zigzag, les pics gauches, les pics droits, et les pics gauches-droits. Comme les définitions de ces trois dernières familles sont très proches (et donc que les preuves impliquant ces éléments sont aussi très similaires), on ne rappelle ici que la définition des pics gauches (et nous nous référons à [7, Définition 3.1] pour les autres définitions, des exemples de chacune des familles étant donnés dans la Figure 4.2 ci-dessous).

**DÉFINITION 5.21.** Soit  $H$  un empilement en type  $\tilde{C}_n$ . On dit que  $H$  est un *pic gauche* s'il existe un entier  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que toutes les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) L'empilement  $H_{\{t, s_1, \dots, s_j\}}$  est l'empilement du mot  $s_j s_{j-1} \dots s_1 t s_1 \dots s_{j-1} s_j$ .
- (ii) Si  $j \neq n-1$ , alors il n'existe pas de point référencé par  $s_{j+1}$  entre les deux points référencés  $s_j$ ; et si  $j = n-1$ , alors il n'y a pas de point référencé  $u$  entre les deux points référencés  $s_{n-1}$ .
- (iii) L'empilement  $H_{\{s_j, s_{j+1}, \dots, s_{n-1}, u\}}$  est alternant si on supprime un point référencé  $s_j$ .

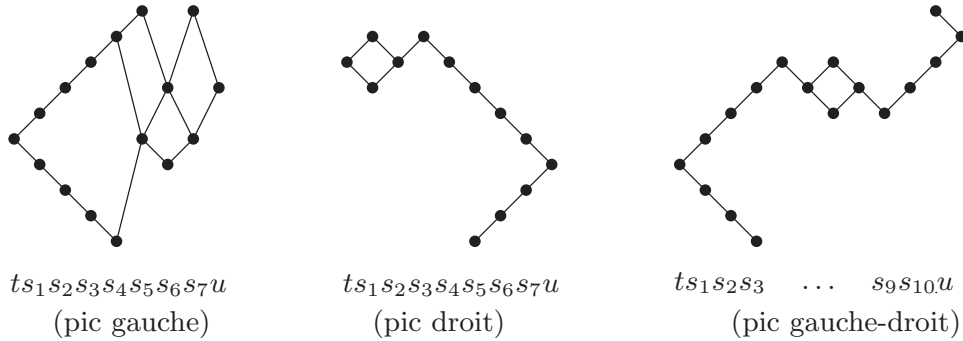


FIGURE 4.2. Un pic gauche, un pic droit, et un pic gauche-droit. Dans le pic gauche, on a  $j = 3$ .

**THÉORÈME 5.22.** Soit  $n \geq 2$  un entier. Un élément  $w$  du groupe de Coxeter de type  $\tilde{C}_n$  est CPC si et seulement si une (ou de manière équivalente, chacune) de ses décompositions réduites  $\mathbf{w}$  satisfait une des trois conditions suivantes :

- (a) chaque générateur apparaît au plus une fois dans  $\mathbf{w}$ , ou
- (b)  $\mathbf{w}$  est un mot alternant et  $|\mathbf{w}_t| = |\mathbf{w}_{s_1}| = \dots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| = |\mathbf{w}_u| \geq 2$ , ou

(c)  $\mathbf{w}$  est un sous-mot du mot infini périodique  $(ts_1s_2\cdots s_{n-1}us_{n-1}\cdots s_2s_1)^\infty$ , dans lequel  $|\mathbf{w}_{s_1}| = \cdots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| \geq 2$  et  $|\mathbf{w}_t| = |\mathbf{w}_u| = |\mathbf{w}_{s_1}|/2$  (c'est-à-dire qu'on a ou bien  $\mathbf{w} = s_i s_{i+1} \cdots s_{i-2} s_{i-1}$  ou bien  $\mathbf{w} = s_i s_{i-1} \cdots s_{i+2} s_{i+1}$ , pour un  $i \in \{0, \dots, n\}$ , où on a posé  $s_0 = t$  et  $s_n = u$ ).

DÉMONSTRATION. Soit  $w$  un élément CPC dans le groupe de Coxeter de type  $\tilde{C}_n$  et soit  $\mathbf{w}$  une de ses décompositions réduites. Nous notons  $H$  l'empilement de  $\mathbf{w}$  et  $H^c$  sa clôture cylindrique. Dans [7, Théorème 3.4], les empilements des éléments PC sont classifiés en cinq familles. Nous allons examiner dans chacune de ces cinq familles quels éléments sont CPC. La première famille se compose des éléments alternants. Comme précédemment, nous distinguons deux cas pour les éléments de cette première famille :

Cas 1. chaque générateur apparaît au plus une fois dans  $\mathbf{w}$ . D'après le Lemme 5.15,  $w$  est CPC car on ne peut pas appliquer de relations de tresses qui ne soient pas des relations de commutations. Ces éléments satisfont la propriété (a).

Cas 2.  $\mathbf{w}$  est un mot alternant dans lequel au moins un générateur apparaît au moins deux fois. Dans ce cas, la preuve va être essentiellement la même que pour les mots alternants en type  $\tilde{A}_{n-1}$ . Rappelons que nous écrivons  $t = s_0$  et  $u = s_n$ . Soit  $\{i_k, i_k + 1, \dots, i_\ell\}$  un intervalle de taille maximale telle que  $|\mathbf{w}_{s_{i_k}}| = \cdots = |\mathbf{w}_{s_{i_\ell}}| \geq 2$  et  $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $|\mathbf{w}_{s_j}| \leq |\mathbf{w}_{s_{i_\ell}}|$ . Supposons que  $i_\ell \leq n - 1$ . D'après la maximalité de  $|\mathbf{w}_{s_{i_\ell}}|$  et le fait que  $\mathbf{w}$  est alternant, on a  $|\mathbf{w}_{s_{i_\ell}}| = |\mathbf{w}_{s_{i_\ell+1}}| + 1$  et il y a deux possibilités pour  $H^c$  : ou bien  $|H^c_{s_{i_\ell}}| = |H^c_{s_{i_\ell-1}}|$ , ou bien  $|H^c_{s_{i_\ell}}| = |H^c_{s_{i_\ell-1}}| + 1$ . On obtient ou bien une c-chaîne cylindrique convexe  $v \prec_c x \prec_c y \prec_c z$  de longueur 4 où  $v, y$  ont tous deux  $s_{i_\ell}$  comme étiquette et  $x, z$  ont tous deux  $s_{i_\ell-1}$  comme étiquette, ou bien une relation de couverture de chaîne entre deux entiers  $p$  et  $q$  ayant  $s_{i_\ell}$  comme étiquette. Cela nous permet de conclure que  $w$  n'est pas CPC grâce au Théorème 5.14 (voir la Figure 4.3 ci-dessous ; dans chaque cas nous avons encerclé les points  $v, x, y, z$  et  $q, r$  respectivement).

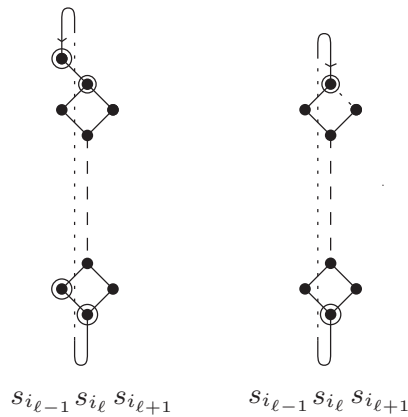


FIGURE 4.3. Les deux clôtures cylindriques possibles dans le cas 2.

Ainsi,  $i_\ell$  doit être égal à  $n$  pour que  $w$  puisse être CPC. Le même argument pour  $i_k$  conduit à  $i_k = 0$ , et donc  $|\mathbf{w}_{s_0}| = |\mathbf{w}_{s_1}| = \cdots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| \geq 2$ . Un tel mot  $\mathbf{w}$  satisfait (b).

Maintenant, nous allons montrer que parmi les quatre familles restantes de [7], les éléments CPC satisfont la propriété (c).

Premièrement, nous supposons que  $H$  appartient à la famille appelée zigzag dans [7], c'est-à-dire que  $\mathbf{w}$  est un sous-mot du mot infini périodique

$$(ts_1s_2 \dots s_{n-1}us_{n-1} \dots s_2s_1)^\infty$$

avec au moins un générateur qui apparaît plus de trois fois (en fait, cette condition ne sera pas utilisée dans cette preuve, et n'est présente dans [7] que pour assurer que les cinq familles susmentionnées soient distinctes). On note  $s_i$  (respectivement  $s_j$ ) la première (respectivement dernière) lettre de  $\mathbf{w}$ . Nous supposons que la deuxième lettre est  $s_{i-1}$ , et que donc  $i \geq 1$  (le cas où la seconde lettre est  $s_{i+1}$  est symétrique et peut donc être prouvé de manière similaire).

Si  $s_j \notin \{s_{i-1}, s_{i+1}\}$ ,  $H^c$  contient nécessairement une c-chaîne cylindrique convexe de longueur 3 impliquant des points de  $H_{\{s_{i-1}, s_i\}}^c$  ou alors une relation de couverture de chaîne entre deux points référencés  $s_i$ .

Si  $s_j = s_{i-1}$ , alors l'avant dernière lettre de  $\mathbf{w}$  est ou bien  $s_i$  ou bien  $s_{i-2}$  (car  $\mathbf{w}$  est un zigzag), ainsi  $H^c$  prend une des deux formes I ou II de la Figure 4.4.

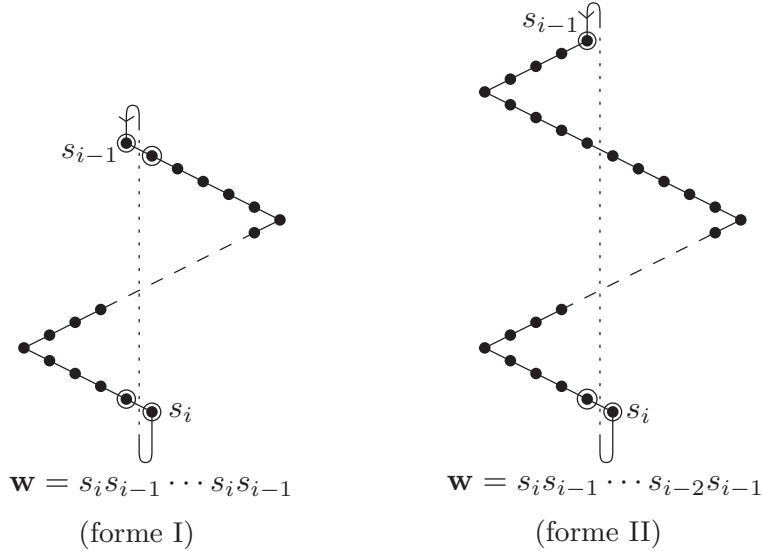
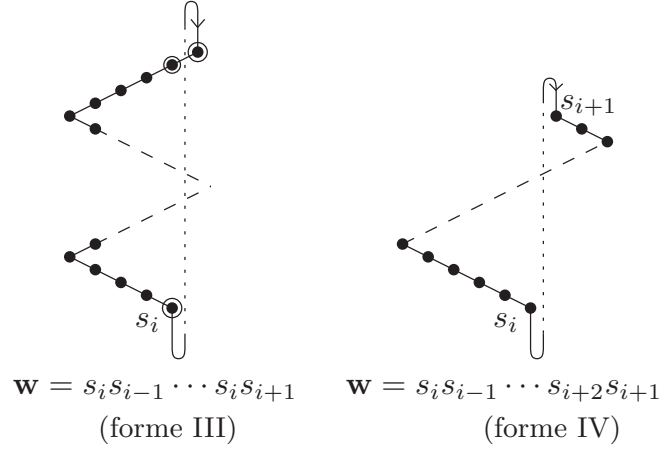


FIGURE 4.4. Les deux clôtures cylindriques possibles quand  $s_j = s_{i-1}$ .

Dans le cas I,  $H^c$  contient une c-chaîne cylindrique convexe de longueur 4 impliquant des points de  $H_{\{s_{i-1}, s_i\}}^c$ , donnés par les deux premières et les deux dernières lettres de  $\mathbf{w}$  (les points correspondant sont entourés dans la Figure 4.4, à gauche). Par le Théorème 5.14,  $w$  n'est pas CPC. Dans le cas II,  $H^c$  contient une c-chaîne cylindrique convexe de longueur 3 impliquant des points de  $H_{\{s_{i-1}, s_i\}}^c$ , donnés par les deux premières et la dernière lettre de  $\mathbf{w}$  (ces points sont entourés dans la Figure 4.4, à droite). Par le Théorème 5.14,  $w$  n'est pas CPC à moins que  $s_i = u$ , et dans ce cas  $\mathbf{w}$  satisfait (c).

Si  $s_j = s_{i+1}$ , alors l'avant-dernière lettre de  $\mathbf{w}$  est ou bien  $s_i$  ou bien  $s_{i+2}$ , ainsi  $H^c$  prend une des deux formes III ou IV de la Figure 4.5.

Dans le cas III,  $H^c$  contient une c-chaîne cylindrique convexe de longueur 3 impliquant des points de  $H_{\{s_i, s_{i+1}\}}^c$ , donnés par la première et les deux dernières lettres de  $\mathbf{w}$  (ces points sont entourés dans la Figure 4.5, à gauche). Par le Théorème 5.14,

FIGURE 4.5. Les deux clôtures cylindriques possibles quand  $s_j = s_{i+1}$ .

$w$  n'est pas CPC à moins que  $s_i = s_0 = t$  ou que  $s_{i+1} = s_n = u$ . La première possibilité n'est pas satisfaite car  $i \geq 1$ . Dans la seconde possibilité,  $\mathbf{w}$  satisfait (c).

Dans le cas IV,  $\mathbf{w}$  satisfait (c).

Finalement, nous supposons que  $H$  appartient à l'une des trois familles restantes, les pics gauches, droits, ou gauches-droits définis dans [7, Définition 3.1]. Premièrement, si  $H$  est un pic gauche, il existe un unique entier  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  satisfaisant les conditions de la Définition 5.21. Trois cas peuvent se produire pour  $|\mathbf{w}_{s_{j+1}}|$ .

Cas 1. Si  $|\mathbf{w}_{s_{j+1}}| = 0$ , alors  $H^c$  contient une relation  $k \prec_c \ell$  telle que  $k$  et  $\ell$  soient référencés par  $s_j$  (comme cela est illustré dans la forme V de la Figure 4.6 ci-dessous). En conséquence,  $w$  n'est pas CPC.

Cas 2. Si  $|\mathbf{w}_{s_{j+1}}| = 1$ , alors  $H^c$  contient une c-chaîne cylindrique convexe de longueur 3 impliquant les points ayant pour étiquette  $s_j$  et  $s_{j+1}$  (voir la forme VI de la Figure 4.6 ci-dessous, où les points impliqués sont entourés). Ainsi,  $w$  n'est pas CPC à moins que  $j = n-1$ . Mais si  $j = n-1$ , alors la condition (c) est satisfaite, et  $\mathbf{w}$  est de la forme  $us_{n-1}s_{n-2}\dots s_1ts_1\dots s_{n-1}$  ou  $s_{n-1}s_{n-2}\dots s_1ts_1\dots s_{n-1}u$  (ceci est illustré dans la Figure 4.6, forme VII).

Cas 3. Si  $|\mathbf{w}_{s_{j+1}}| = 2$ , alors, comme le mot restant après la suppression des occurrences de  $t, s_1, \dots, s_{j-1}$  et d'une occurrence de  $s_j$  dans  $\mathbf{w}$  est alternant, le même raisonnement que pour les mots alternants nous permet de prouver que tous les générateurs  $s_{j+2}, s_{j+3}, \dots, s_{n-1}, u$  apparaissent exactement deux fois dans  $\mathbf{w}$ . Les deux occurrences de  $s_{j+1}$  et la dernière occurrence de  $s_{j+2}$  forment une c-chaîne cylindrique convexe de longueur 3 (voir la forme VIII dans la Figure 4.6 ci-dessous, où les points concernés sont entourés), ce qui empêche  $w$  d'être CPC, à moins que  $j+1 = n-1$ . Mais si  $j+1 = n-1$ , alors les deux occurrences de  $s_{n-1}$  et les deux occurrences de  $u$  forment une c-chaîne cylindrique convexe de longueur 4 commençant à la première occurrence de  $u$ . En conséquence,  $w$  n'est pas CPC.

Si  $H$  est un pic droit, le même raisonnement que pour les pics gauches s'applique aussi et permet de montrer que  $w$  n'est pas CFC à moins que  $\mathbf{w}$  n'ait une des deux formes suivantes :  $ts_1s_2\dots s_{n-1}us_{n-1}\dots s_1$  ou  $s_1s_2\dots s_{n-1}us_{n-1}\dots s_1t$ , et satisfasse donc la condition (c).

Si  $H$  est un pic gauche-droit, soient  $j, k \in \{1, \dots, n-1\}$  les deux uniques entiers présents dans la [7, Définition 3.1]. Deux cas peuvent se produire pour  $j$  et  $k$ .

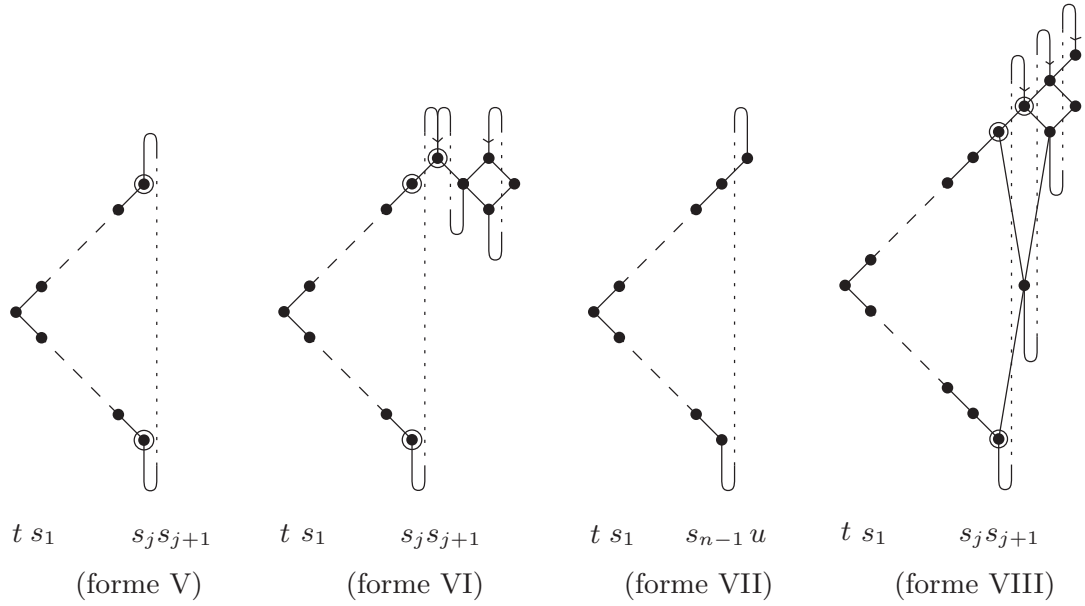


FIGURE 4.6. Les différentes clôtures cylindriques des pics gauches.

Si  $j \neq k - 1$ , le même argument que dans le cas des pics gauches à propos de  $|\mathbf{w}_{s_{j+1}}|$  nous permet de montrer que  $w$  n'est pas un élément CPC (car le cas  $j = n - 1$  n'est pas possible d'après les définitions de  $j$  et  $k$ ). Si  $j = k - 1$ , alors  $\mathbf{w}$  satisfait (c), et prend une des deux formes suivantes :  $s_j s_{j-1} \dots t \dots s_j s_k \dots u \dots s_k$  ou  $s_k s_{k+1} \dots u \dots s_k s_j \dots t \dots s_j$ .

Réciproquement, chaque mot  $\mathbf{w}$  satisfaisant une des trois conditions (a), (b), ou (c) est la décomposition réduite d'un élément CPC. En effet, la clôture cylindrique de l'empilement correspondant ne peut pas contenir une relation  $i \prec_c j$  telle que  $i$  et  $j$  aient la même étiquette. De plus,  $H^c$  contient une c-chaîne cylindrique convexe de longueur 3 seulement si les points impliqués appartiennent à  $H_{\{t, s_1\}}^c$  ou  $H_{\{s_{n-1}, u\}}^c$ . Enfin,  $H^c$  ne contient pas de c-chaîne cylindrique convexe de longueur 4 : cela vient directement de la définition des conditions (a) et (c), et pour les mots  $\mathbf{w}$  satisfaisant (b), la même preuve que pour le type  $\tilde{A}$  reste valable (voir la fin de la preuve du Théorème 5.17).  $\square$

COROLLAIRE 5.23. *Pour  $n \geq 2$ , on obtient la fonction génératrice suivante :*

$$(142) \quad \tilde{C}_n^{CPC}(q) = A_{n+1}^{CPC}(q) + \frac{2^n}{1 - q^{n+1}} q^{2(n+1)} + \frac{2n}{1 - q^{2n}} q^{2n}.$$

*Les coefficients de  $\tilde{C}_n^{CPC}(q)$  sont ultimement périodiques de période exacte  $n(n+1)$  si  $n$  est impair, et  $2n(n+1)$  si  $n$  est pair. En outre, quelle que soit la parité de  $n$ , la périodicité commence à la longueur  $n+1$ .*

DÉMONSTRATION. Notons que les ensembles des éléments dont les expressions réduites satisfont les conditions (a), (b) ou (c) du Théorème 5.22 sont disjoints.

Le premier terme du côté droit de (142) correspond aux éléments CPC dont les expressions réduites satisfont (a). En effet, ces éléments sont en bijection avec  $A_{n+1}^{CPC}$  d'après les diagrammes de Coxeter des types  $A_{n+1}$  et  $\tilde{C}_n$ .

$$\sum_{h \geq 2} 2^n q^{h(n+1)} = \frac{2^n}{1 - q^{n+1}} q^{2(n+1)}.$$
$$\sum_{h \geq 1} 2n q^{2nh} = \frac{2n}{1 - q^{2n}} q^{2n},$$

Désormais, nous prouvons la périodicité. Les coefficients de

$$\frac{2^n}{1 - q^{n+1}} q^{2(n+1)} + \frac{2n}{1 - q^{2n}} q^{2n}$$

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 2n, 0, 2^n, 0, \dots).$$

Nous pouvons déduire de ceci la caractérisation et l'énumération des éléments CPC en type  $B_n$ , dont le diagramme de Coxeter est rappelé ci-dessous.

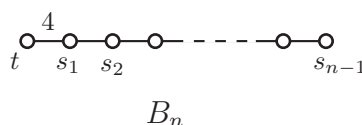


FIGURE 4.7. Le diagramme de Coxeter du type  $B_n$ .

$$B_n^{CPC}(q) = A_n^{CPC}(q).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $w$  un élément CPC en type  $B_n$ , et fixons  $\mathbf{w}$  l'une de ses décompositions réduites. En comparant les diagrammes de Coxeter,  $w$  est aussi un élément CPC en type  $\tilde{C}_n$  tel que le générateur  $u$  n'apparaît pas dans  $\mathbf{w}$ . Mais, d'après le Théorème 5.17, les seuls tels éléments CPC sont ceux pour lesquels  $\mathbf{w}$  satisfait la condition (a) (et ne contient pas de  $u$ ) : en effet, si  $\mathbf{w}$  satisfait (b) (respectivement (c)), tous les générateurs apparaissent le même nombre de fois (respectivement  $u$  doit apparaître dans  $\mathbf{w}$ ).

Réciproquement, si tous les générateurs apparaissent au plus une fois dans  $\mathbf{w}$ , nous avons déjà vu dans le Lemme 5.15 que  $w$  est un élément CPC.  $\square$

**4.2. Les types  $\tilde{B}_{n+1}$  et  $D_{n+1}$ .** Nous allons tout d'abord obtenir dans ce paragraphe une caractérisation des éléments CPC en termes de décompositions réduites en type  $\tilde{B}_{n+1}$ , nous en déduirons une caractérisation et une énumération en type  $D_{n+1}$ , ce qui nous permettra d'effectuer aussi l'énumération en type  $\tilde{B}_{n+1}$ .

Dans le reste de ce paragraphe, par “ $\mathbf{w}$  est un mot alternant”, nous entendons que  $t_1$  et  $t_2$  alternent dans  $\mathbf{w}$  et que si on remplace dans  $\mathbf{w}$   $t_1$  et  $t_2$  par  $s_0$ , et  $u$  par  $s_n$ , alors ce qu'on obtient est un mot alternant au sens de la Définition 5.16

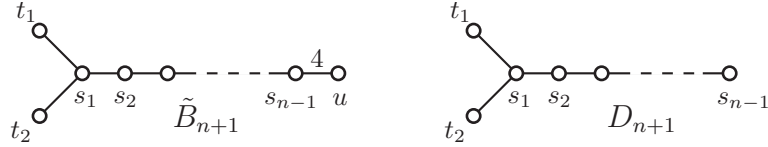


FIGURE 4.8. Les diagrammes de Coxeter des types  $\tilde{B}_{n+1}$  et  $D_{n+1}$ .

THÉORÈME 5.25. Soit  $n \geq 3$  un entier. Un élément  $w$  du groupe de Coxeter de type  $\tilde{B}_{n+1}$  est CPC si et seulement une (ou de manière équivalente, chacune) de ses décompositions réduites  $\mathbf{w}$  satisfait une des trois conditions suivantes :

- (a) chaque générateur apparaît au plus une fois dans  $\mathbf{w}$ , ou
- (b)  $\mathbf{w}$  est un mot alternant, tel que  $|\mathbf{w}_{s_1}| = \dots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| = |\mathbf{w}_u| \geq 2$ , et  $|\mathbf{w}_{t_1}| = |\mathbf{w}_{t_2}| = |\mathbf{w}_{s_1}|/2$  (en particulier,  $|\mathbf{w}_{s_1}|$  est pair), ou
- (c)  $\mathbf{w}$  est un sous mot du mot infini périodique  $(t_1 t_2 s_1 s_2 \dots s_{n-1} u s_{n-1} \dots s_2 s_1)^\infty$  dans lequel  $t_1$  et  $t_2$  sont autorisés à commuter, tel que  $|\mathbf{w}_{s_1}| = \dots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| \geq 2$ , et  $|\mathbf{w}_{t_2}| = |\mathbf{w}_{t_1}| = |\mathbf{w}_u| = |\mathbf{w}_{s_1}|/2$  (c'est-à-dire que  $\mathbf{w}$  prend une des cinq formes suivantes : ou bien  $s_i s_{i+1} \dots s_{i-2} s_{i-1}$ , ou bien  $s_i s_{i-1} \dots s_{i+2} s_{i+1}$  pour un  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , ou bien  $t_1 s_1 \dots s_1 t_2$ , ou bien  $t_2 s_1 \dots t_1$ , ou bien  $t_1 t_2 s_1 \dots s_1$ ).

DÉMONSTRATION. Les étapes de cette preuve sont les mêmes que celles de la preuve du Théorème 5.22. Soit  $w$  un élément CPC en type  $\tilde{B}_{n+1}$  et fixons  $\mathbf{w}$  une de ses décompositions réduites. On dénote par  $H$  l'empilement de  $\mathbf{w}$  et par  $H^c$  la clôture cylindrique de  $H$ . Dans [7, Théorème 3.10], les éléments PC sont classifiés en cinq familles distinctes. La première famille est celle des éléments alternants. Comme pour les types précédents, nous devons distinguer deux cas :

Cas 1. chaque générateur apparaît au plus une fois dans  $\mathbf{w}$ . Ces éléments satisfont (a).

Cas 2.  $\mathbf{w}$  provient d'un mot alternant de type  $\tilde{C}_n$ , auquel on a appliqué ou bien le remplacement  $(t, t, \dots, t) \rightarrow (t_1, t_2, t_1, \dots)$  ou bien le remplacement  $(t, \dots, t) \rightarrow (t_2, t_1, \dots)$ . La même preuve que dans le type  $\tilde{C}$  montre que

$$|\mathbf{w}_{t_1, t_2}| = |\mathbf{w}_{s_1}| = \dots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| = |\mathbf{w}_u|$$

(rappelons que  $|\mathbf{w}_{t_1, t_2}|$  est le nombre d'occurrence de  $t_1$  et de  $t_2$  dans  $\mathbf{w}$ ). Si  $|\mathbf{w}_{t_1, t_2}|$  est impair, on va supposer que l'on a appliqué le remplacement  $(t, t, \dots, t) \rightarrow (t_1, t_2, t_1, \dots)$  (le cas où on applique l'autre remplacement est symétrique). Nous pouvons distinguer ici quatre cas :  $t_1$  apparait avant ou après  $s_1$  dans  $\mathbf{w}$  et  $s_1$  apparait avant ou après  $s_2$  dans  $\mathbf{w}$ . Dans tous ces cas, on peut trouver une c-chaîne cylindrique convexe dans  $H^c$  de longueur 3 impliquant trois des quatre points suivants : la première et la dernière occurrence de  $t_1$  dans  $\mathbf{w}$  ainsi que la première et la dernière occurrence de  $s_1$ . (Par exemple, si  $t_1$  apparait avant  $s_1$  et si  $s_1$  apparait avant  $s_2$ , alors la première et la dernière occurrence de  $s_1$  et la première occurrence de  $t_1$  constituent une c-chaîne cylindrique convexe commençant à la dernière occurrence de  $s_1$ .) Ainsi,  $|\mathbf{w}_{t_1, t_2}|$  est pair, et comme  $\mathbf{w}$  est alternant,  $|\mathbf{w}_{t_2}| = |\mathbf{w}_{t_1}| = |\mathbf{w}_{s_1}|/2$ . Une telle expression  $\mathbf{w}$  satisfait (b).

Maintenant, nous allons montrer que parmi les quatre familles restantes de [7], les expressions réduites des éléments CPC doivent vérifier la condition (c). Il y a deux possibilités :

Cas 1.  $\mathbf{w}$  est un sous-mot de  $(t_1 t_2 s_1 s_2 \dots s_{n-1} u s_{n-1} \dots s_2 s_1)^\infty$ , qui est un mot infini périodique dans lequel  $t_1$  et  $t_2$  peuvent commuter, tel que au moins un générateur apparait au moins deux fois. La même disjonction de cas que dans le type  $\tilde{C}$  amène à la condition (c).

Cas 2.  $H_{\mathbf{w}}$  est un empilement parmi des cas spéciaux analogues à ceux du type  $\tilde{C}_n$  (les différents pics) qui ne sont pas CPC, à l'exception de ceux qui satisfont la condition (c) (et sont donc de longueur  $2(n+2)$ ). Nous ne donnons pas plus de détails ici, car la preuve est très similaire à celle du type  $\tilde{C}_n$ .

Réciproquement, tous les éléments  $w$  dont les expressions réduites  $\mathbf{w}$  satisfont une des trois conditions (a), (b) ou (c) sont CPC. En effet,  $H_{\mathbf{w}}^c$  ne contient pas de relation  $i \prec j$  telle que  $i$  et  $j$  aient la même étiquette. La clôture cylindrique  $H_{\mathbf{w}}^c$  contient des c-chaînes cylindriques convexes de longueur 3 seulement si les points impliqués ont pour étiquette  $s_{n-1}$  ou  $u$ ; et  $H_{\mathbf{w}}^c$  ne contient pas de c-chaîne cylindrique convexe de longueur 4 (la même preuve que pour le Théorème 5.22 reste valable).  $\square$

PROPOSITION 5.26. *Soit  $n \geq 3$  un entier. Les éléments CPC en type  $D_{n+1}$  sont ceux qui ont des décompositions réduites dans lesquelles chaque générateur n'apparait qu'au plus une fois. En outre, on a  $D_1^{CPC}(q) = 1 + q$ ,  $D_2^{CPC}(q) = 1 + 2q + q^2$ ,  $D_3^{CPC}(q) = 1 + 3q + 5q^2 + 4q^3$ , et pour  $n \geq 3$  :*

$$(143) \quad D_{n+1}^{CPC}(q) = (2q + 1)D_n^{CPC}(q) - qD_{n-1}^{CPC}(q).$$

En termes de séries génératrices, on a :

$$D^{CPC}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} D_{n+1}^{CPC}(q)x^n = \frac{(1+q) - xq(1+q) + x^2q^2(1+2q)}{1 - (2q+1)x + qx^2}.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $w$  un élément CPC en type  $D_{n+1}$  et fixons  $\mathbf{w}$  l'une de ses décompositions réduites. En inspectant les diagrammes de Coxeter, on constate que  $\mathbf{w}$  est aussi la décomposition réduite d'un élément CPC  $w'$  en type  $\tilde{B}_{n+1}$  (tel que le générateur  $u$  n'apparait pas dans  $\mathbf{w}$ ). Cependant, d'après le Théorème 5.25, les seuls tels éléments CPC sont ceux dont les décompositions réduites satisfont la condition (a) dudit théorème (et ne comprennent pas de  $u$ ) : en effet, si  $\mathbf{w}$  satisfait (b) ou (c), alors  $u$  doit apparaître dans  $\mathbf{w}$ .



Réciproquement, si tous les générateurs apparaissent au plus une fois dans  $\mathbf{w}$ , on a déjà vu que  $w$  est CPC d'après le Lemme 5.15.

Utiliser cette caractérisation des éléments CPC en type  $D_{n+1}$  nous permet de calculer les polynômes  $D_1^{CPC}(q)$ ,  $D_2^{CPC}(q)$  et  $D_3^{CPC}(q)$  via une énumération exhaustive de ces éléments.

Si  $n \geq 3$ , tous les éléments CPC de type  $D_{n+1}$  peuvent être obtenus de manière unique à partir d'un élément CPC  $w'$  en type  $A_{n-1}$  en ajoutant à une décomposition réduite  $\mathbf{w}'$  de  $w'$  ou bien rien, ou bien une occurrence de  $t_1$  (avec deux choix possibles : avant ou après  $s_1$ ), ou bien une occurrence de  $t_2$  (avec deux choix possibles), ou bien une occurrence de  $t_1$  et une de  $t_2$  (avec quatre choix possibles). Cependant, si  $s_1$  n'apparaît pas dans  $\mathbf{w}'$ , nous n'avons pas de choix pour ajouter  $t_1$  et/ou  $t_2$ , car  $t_1$  et  $t_2$  commutent avec tous les générateurs autres que  $s_1$ . (Notons que le choix de la décomposition réduite de  $w'$  n'influe pas sur ce processus.) Cela conduit à la relation de récurrence suivante :

$$D_{n+1}^{CPC}(q) = (1 + 4q + 4q^2)A_{n-1}^{CPC}(q) - (2q + 3q^2)A_{n-2}^{CPC}(q).$$

Enfin, nous multiplions cette relation par  $x^{n-1}$  et nous sommions sur  $n \geq 3$ . Nous calculons  $D^{CPC}(x)$  en utilisant les valeurs de  $D_1^{CPC}(q)$ ,  $D_2^{CPC}(q)$ ,  $D_3^{CPC}(q)$  et la fonction génératrice  $A^{CPC}(x)$  du Théorème 5.19. Comme  $D^{CPC}(x)$  est une fraction rationnelle, la relation de récurrence (143) peut s'extraire directement du dénominateur de  $D^{CPC}(x)$ .  $\square$

COROLLAIRE 5.27. *On a pour  $n \geq 3$  :*

$$(144) \quad \tilde{B}_{n+1}^{CPC}(q) = D_{n+2}^{CPC}(q) + \frac{2^{n+1}}{1 - q^{2(n+1)}} q^{2(n+1)} + \frac{2(n+1)}{1 - q^{2n+1}} q^{2n+1}.$$

*En outre, les coefficients de  $\tilde{B}_{n+1}^{CPC}(q)$  sont ultimement périodiques de période  $2(n+1)(2n+1)$ , et la périodicité commence à la longueur  $n+3$ .*

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que les ensembles des éléments dont les expressions réduites satisfont les conditions (a), (b) ou (c) du Théorème 5.25 sont disjoints.

Le premier terme dans le côté droit de (144) est le cardinal de l'ensemble des éléments dont les mots réduits satisfont la condition (a). D'après la Proposition 5.26, cet ensemble est en bijection avec  $D_{n+2}^{CPC}$ .

Le second terme du côté droit de (144) correspond aux éléments CPC dont les expressions réduites satisfont (b) : ils ont pour longueur un multiple de  $2(n+1)$ , et il y a  $2^{n+1}$  tels éléments pour chaque longueur possible.

Avec la condition sur le nombre d'occurrences de chaque générateur, on constate que la longueur d'un élément qui satisfait (c) doit être un multiple de  $2n+1$ , et il y a  $2n+2$  tels éléments pour chaque longueur possible (les deux premières lettres pouvant être  $s_i s_{i+1}$ ,  $s_i s_{i-1}$ ,  $u s_{n-1}$ ,  $t_1 t_2$ ,  $t_1 s_1$  ou  $t_2 s_1$ ). Ceci établit (144).

Maintenant, nous prouvons la périodicité. Les coefficients de

$$\frac{2^{n+1}}{1 - q^{2(n+1)}} q^{2(n+1)} + \frac{2(n+1)}{1 - q^{2n+1}} q^{2n+1}$$

sont ultimement périodiques, à partir de la longueur  $n+3$ , la suite des coefficients est de la forme :

$$(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, 2(n+1), 2^{n+1}, 0, \dots).$$

La période est le plus petit commun multiple de  $2(n+1)$  et  $2n+1$ , qui est  $2(n+1)(2n+1)$ . En utilisant (143), une induction sur  $n$  nous permet de montrer que  $\tilde{D}_{n+2}^{CPC}(q)$  est un polynôme en  $q$  de degré  $n+2$  et de coefficient dominant  $2^{n+1}$ . Ainsi, la périodicité commence exactement à la longueur  $n+3$ .  $\square$

**4.3. Le type  $\tilde{D}_{n+2}$ .** La situation est vraiment similaire aux précédentes en type  $\tilde{D}_{n+2}$  pour ce qui est de la caractérisation, mais la fonction génératrice a une forme assez différente, à cause des spécificités du diagramme de Coxeter de ce type.

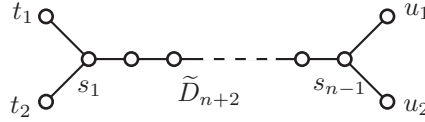


FIGURE 4.9. Le diagramme de Coxeter du type  $\tilde{D}_{n+2}$ .

Dans ce paragraphe, par “ $\mathbf{w}$  est un mot alternant”, nous voulons dire que  $t_1$  et  $t_2$  alternent dans  $\mathbf{w}$ ; que  $u_1$  et  $u_2$  alternent dans  $\mathbf{w}$ ; et que si on remplace  $t_1$  et  $t_2$  par  $s_0$ , ainsi que  $u_1$  et  $u_2$  par  $s_n$ , alors le mot ainsi obtenu à partir de  $\mathbf{w}$  est un mot alternant au sens de la Définition 5.16.

**THÉORÈME 5.28.** *Soit  $n \geq 2$  un entier. Un élément  $w$  du groupe de Coxeter de type  $\tilde{D}_{n+2}$  est CPC si et seulement si une (ou de manière équivalent, chacune) de ses décompositions réduites  $\mathbf{w}$  vérifie une des conditions suivantes :*

- (a) *chaque générateur apparaît au plus une fois dans  $\mathbf{w}$ , ou*
- (b)  *$\mathbf{w}$  est un mot alternant,  $|\mathbf{w}_{s_1}| = \dots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| \geq 2$ , et  $|\mathbf{w}_{t_1}| = |\mathbf{w}_{t_2}| = |\mathbf{w}_{u_1}| = |\mathbf{w}_{u_2}| = |\mathbf{w}_{s_1}|/2$  (en particulier,  $|\mathbf{w}_{s_1}|$  est pair), ou*
- (c)  *$\mathbf{w}$  est un sous mot de  $(t_1 t_2 s_1 s_2 \dots s_{n-1} u_1 u_2 s_{n-1} \dots s_2 s_1)^\infty$ , qui est un mot infini périodique dans lequel  $t_1$  et  $t_2$ ,  $u_1$  et  $u_2$  peuvent commuter, tel que  $\mathbf{w}$  vérifie  $|\mathbf{w}_{s_1}| = \dots = |\mathbf{w}_{s_{n-1}}| \geq 2$ , et  $|\mathbf{w}_{t_2}| = |\mathbf{w}_{t_1}| = |\mathbf{w}_{u_1}| = |\mathbf{w}_{u_2}| = |\mathbf{w}_{s_1}|/2$ .*

**DÉMONSTRATION.** La même preuve que pour le Théorème 5.25 reste valable, nous n'avons besoin que d'ajouter les remplacements  $(u, u, \dots u) \rightarrow (u_1, u_2, \dots)$  ou bien  $(u, \dots, u) \rightarrow (u_2, u_1, \dots)$  et d'utiliser [7]. C'est pourquoi nous omettons ici les détails.  $\square$

A nouveau, nous pouvons calculer la fonction génératrice associée.

**PROPOSITION 5.29.** *On a pour  $n \geq 2$  :*

$$(145) \quad \tilde{D}_{n+2}^{CPC}(q) = Q_{n+2}(q) + \frac{2^{n+2} + 2(n+2)}{1 - q^{2(n+1)}} q^{2(n+1)},$$

où  $Q_{n+2}(q)$  est un polynôme en  $q$  de degré  $n+3$  tel que  $Q_4(q) = 1 + 5q + 14q^2 + 28q^3 + 33q^4 + 16q^5$ ,  $Q_5(q) = 1 + 6q + 20q^2 + 46q^3 + 73q^4 + 72q^5 + 32q^6$ , et pour  $n \geq 4$  :

$$(146) \quad Q_{n+2}(q) = (2q+1)Q_{n+1}(q) - qQ_n(q).$$

En outre, les coefficients de  $\tilde{D}_{n+2}^{CPC}(q)$  sont ultimement périodiques de période exacte  $2(n+1)$ , et la périodicité commence à la longueur  $n+4$ .

**DÉMONSTRATION.** À nouveau on note que les ensembles d'éléments dont les décompositions réduites satisfont les conditions (a), (b) ou (c) du Théorème 5.28 sont disjoints. Le premier terme du membre droit de (145) énumère les éléments CPC dont les décompositions réduites vérifient (a). Ces éléments peuvent tous être

obtenus de manière unique depuis un élément CPC  $w$  de type  $D_{n+1}$  ayant  $\mathbf{w}$  comme décomposition réduite en ajoutant à  $\mathbf{w}$ , ou bien rien, ou bien une occurrence de  $u_1$  (avec deux choix possibles : avant ou après  $s_{n-1}$ ), ou une occurrence de  $u_2$  (avec deux choix), ou une occurrence de  $u_1$  et une de  $u_2$  (avec quatre choix). Cependant, si  $s_{n-1}$  n'apparaît pas dans  $\mathbf{w}$ , nous n'avons pas de choix pour l'ajout de  $u_1$  et/ou  $u_2$ , car  $u_1$  et  $u_2$  commutent avec tous les autres générateurs. Cela conduit à la relation de récurrence suivante :

$$Q_{n+2}(q) = (1 + 4q + 4q^2)D_{n+1}^{CPC}(q) - (2q + 3q^2)D_n^{CPC}(q).$$

En utilisant ceci, la relation de récurrence attendue (146) pour les polynômes  $Q_n(q)$  s'avère équivalente à la relation de récurrence suivante pour les polynômes  $D_n^{CPC}(q)$  :

$$\begin{aligned} & (1 + 4q + 4q^2)D_{n+1}^{CPC}(q) - (2q + 3q^2)D_n^{CPC}(q) \\ &= (2q + 1) \left[ (1 + 4q + 4q^2)D_n^{CPC}(q) - (2q + 3q^2)D_{n-1}^{CPC}(q) \right] \\ & \quad - q \left[ (1 + 4q + 4q^2)D_{n-1}^{CPC}(q) - (2q + 3q^2)D_{n-2}^{CPC}(q) \right]. \end{aligned}$$

On peut constater que cette relation est vraie en rassemblant d'un même côté tous les termes qui ont  $(1 + 4q + 4q^2)$  comme facteur commun, et de l'autre côté tous les termes qui ont  $(2q + 3q^2)$  comme facteur commun, et en remarquant ensuite que chacun des côtés s'annulent grâce à (143).

Les éléments CPC dont les décompositions réduites satisfont (b) ont comme longueur un multiple entier de  $2(n + 1)$  et il y en a  $2^{n+2}$  pour chaque longueur possible. Les éléments dont les décompositions satisfont (c) ont aussi une longueur multiple de  $2(n+1)$ , et il y en a  $2(n+2)$  pour chaque longueur possible (en considérant les deux premières lettres). Cela établit (145).

Le second terme du membre droit de (145) est périodique de période exacte  $2(n + 1)$  : à partir de la longueur  $n + 4$ , la suite des coefficients est de la forme :

$$\underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-2}, 2^{n+2} + 2(n + 2), 0, \dots, 0, 2^{n+2} + 2(n + 2), \dots).$$

Une récurrence sur  $n$  utilisant (146) nous permet de montrer que  $Q_{n+2}(q)$  est un polynôme en  $q$  de degré  $n + 3$  ayant  $2^{n+2}$  comme coefficient dominant. D'après cette propriété et (145), la périodicité commence à la longueur  $n + 4$ .  $\square$

Notons que la fonction génératrice  $Q(x)$  des polynômes  $Q_n(q)$  est calculable grâce aux techniques classiques. Cependant nous ne la donnons pas ici, car son expression n'est pas très esthétique<sup>1</sup>.

**4.4. Les types exceptionnels.** Les types exceptionnels finis sont  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $G_2$ ,  $I_2(m)$ . Énumérer les éléments CFC de ces deux derniers types, y compris en raffinant par la longueur de Coxeter est trivial, tandis que les autres groupes sont des cas spéciaux des familles  $E_n$  ( $n \geq 6$ ),  $F_n$  ( $n \geq 4$ ),  $H_n$  ( $n \geq 3$ ). Il a été montré dans [9] que ces familles contiennent un nombre fini d'éléments CPC. Il est possible d'appliquer notre méthode pour caractériser ces éléments en termes de clôture cylindrique d'empilements et pour obtenir des relations de récurrence pour leurs fonctions génératrices raffinées par la longueur. Cependant,

1. et c'est un euphémisme que de dire cela...

comme le paramètre  $q$  peut être inséré directement dans les relations de récurrence de [9], nous laissons cela aux lecteurs intéressés.

Pour les types exceptionnels ayant un nombre fini d'éléments CPC ( $\tilde{E}_8$  et  $\tilde{F}_4$ ), les fonctions génératrices des éléments CPC sont des polynômes qui sont calculables récursivement comme dans le type  $A$ , car  $\tilde{E}_8 = E_9$  et  $\tilde{F}_4 = F_5$ .

Il reste à étudier les trois types exceptionnels qui contiennent un nombre infini d'éléments CPC. Pour ces types, nous mentionnons seulement les résultats, sans détailler les preuves. Voici cependant l'esquisse de l'analyse : comme pour les autres types, on regarde la classification des éléments PC présente dans [7, Lemmas 5.2–5.4], et on constate via l'utilisation des clôtures cylindriques de leurs empilements qu'il n'existe des éléments CPC que pour quelques longueurs explicites, qui doivent être ou bien bornées, ou bien un multiple entier d'une constante qui dépend du type considéré.

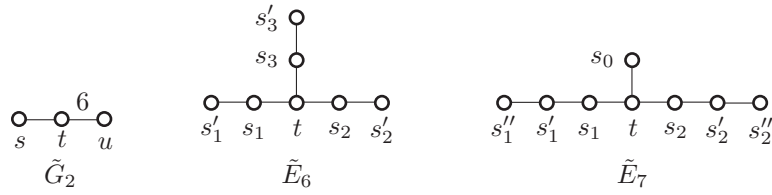


FIGURE 4.10. Les diagrammes de Coxeter des types  $\tilde{G}_2$ ,  $\tilde{E}_6$  et  $\tilde{E}_7$ .

**THÉOREME 5.30.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter de type affine exceptionnel  $\tilde{G}_2$  (respectivement  $\tilde{E}_6$ , respectivement  $\tilde{E}_7$ ).*

*On définit dans  $W$  l'élément  $w_2$  comme celui qui admet le mot  $utsut$  (respectivement  $s_1ts'_1s_1s_2ts'_2s_2s_3ts'_3s_3$ , respectivement  $s_1ts'_1s_0s_1s'_1ts'_1s_1s_2ts'_2s_0s_2s'_2ts'_2s_2$ ) comme décomposition réduite. Un élément  $w \in W$  est CPC si et seulement si une de ses décompositions réduites satisfait une des conditions suivantes :*

- (i)  $\mathbf{w}$  appartient à un ensemble fini qui dépend de  $W$ , ou
- (ii)  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2^n\mathbf{w}_3$ , où  $n$  est un entier positif,  $\mathbf{w}_2 \in R(w_2)$  et  $\mathbf{w}_3\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$ .

*En conséquence, les fonctions génératrices correspondantes s'expriment ainsi :*

$$\tilde{G}_2^{CPC}(q) = R_1(q) + \frac{6q^5}{1 - q^5},$$

$$\tilde{E}_6^{CPC}(q) = R_2(q) + \frac{23q^{12}}{1 - q^{12}},$$

$$\tilde{E}_7^{CPC}(q) = R_3(q) + \frac{45q^{18}}{1 - q^{18}},$$

où  $R_1(q)$ ,  $R_2(q)$  et  $R_3(q)$  sont des polynômes.

#### 4.5. Éléments cycliquement pleinement commutatifs logarithmiques.

Ici, nous étudions certains éléments particulier d'un groupe de Coxeter général. Rappelons que pour un élément  $w \in W^{CPC}$ , le *support* de  $w$ , dénoté par  $\text{supp}(w)$ , est l'ensemble des générateurs qui apparaissent dans une (de manière équivalente, chacune) des décompositions réduites de  $w$ . Il est connu que si  $w \in W$  et si  $k$  est un entier positif, alors  $\ell(w^k) \leq k\ell(w)$ . Si cette inégalité est une égalité pour tous les  $k \in \mathbb{N}^*$  (c'est-à-dire que  $\mathbf{w}^k$  est réduit pour tout  $k$ , où  $\mathbf{w}$  est une expression réduite de  $w$ ), alors  $w$  est *logarithmique* (on pourra se référer à [9] pour avoir plus

d'informations sur les éléments logarithmiques). Par exemple, il n'y a aucun élément logarithmique dans les groupes de Coxeter finis, parce qu'il n'y a qu'un nombre fini d'expressions réduites. En utilisant notre caractérisation pour les types affines des Théorèmes 5.17, 5.25, 5.22, 5.28, on déduit le théorème ci-dessous sur les éléments logarithmique dans ces types. Une généralisation de ce résultat à été prouvée pour tous les groupes de Coxeter dans [46, Corollary E], en utilisant des méthodes de théorie des groupes géométriques. Néanmoins, comme notre approche est différente et plus combinatoire, nous trouvons intéressant de mentionner notre preuve, bien qu'elle ne fonctionne que pour les types affines.

**THÉORÈME 5.31.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter de type  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ , ou  $\tilde{D}$ . Si  $w \in W$  est un élément CPC,  $w$  est logarithmique si et seulement si une (ou de manière équivalente, chacune) de ses décompositions réduites  $\mathbf{w}$  est à support complet (c'est-à-dire que tous les générateurs apparaissent dans  $\mathbf{w}$ ). En particulier, il y a un nombre fini d'éléments CPC qui ne sont pas logarithmiques.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $w \in W^{CPC}$  et soit  $\mathbf{w}$  une de ces expressions réduites. Supposons que  $\mathbf{w}$  ne soit pas à support complet. Dans ce cas,  $w$  appartient à un sous-groupe parabolique propre de  $W$ , qui est donc un groupe de Coxeter fini d'après une propriété classique des groupes de Coxeter affines (voir [35, Section 5.5]). Ainsi  $w$  n'est pas logarithmique, et il n'y a qu'un nombre fini de tels éléments, qui sont les éléments dont les décompositions réduites satisfont la condition (a) des Théorèmes 5.17, 5.25, 5.22, 5.28 (et qui en plus ne sont pas à support complet).

Réciproquement, supposons que  $w$  est un élément CPC à support complet. D'après les Théorèmes 5.17, 5.25, 5.22, 5.28,  $\mathbf{w}$  doit satisfaire ou bien (b), ou bien (c), ou être la décomposition réduite d'un élément de Coxeter (ce qui signifie que chaque générateur doit être présent exactement une seule fois dans  $\mathbf{w}$ ). Si  $w$  est un élément de Coxeter,  $w$  est logarithmique (voir [73]). Si  $\mathbf{w}$  satisfait (b) (respectivement (c)), on vérifie que  $\mathbf{w}^k$  satisfait aussi (b) (respectivement (c)) et est donc réduit. Il s'ensuit donc que  $w$  est logarithmique.  $\square$

On peut aussi remarquer que les puissances d'un élément de Coxeter sont toujours CPC dans les types affines  $\tilde{A}_{n-1}$  et  $\tilde{C}_n$  parce que ces puissances satisfont la condition relative aux mots alternants, mais ne sont jamais CPC dans les types affines  $\tilde{B}_{n+1}$  et  $\tilde{D}_{n+2}$  (car ils ne satisfont ni la condition (b) ni la condition (c) des théorèmes relatifs à ces types).

## 5. Les involutions cycliquement pleinement commutatives

Une question naturelle qui se pose dans l'étude des éléments PC est de calculer le nombre d'involutions PC dans les groupes de Coxeter finis et affines. À titre d'illustration, ce nombre est pour certains groupes (incluant ceux de types  $A, B, D$  et  $E$ ) la somme des dimensions des représentations irréductibles d'un quotient naturel de l'algèbre d'Iwahori–Hecke associée au groupe, voir [22]. De manière similaire, nous allons maintenant nous concentrer sur les éléments CPC qui sont des involutions. Le résultat principal de cette section est le fait qu'il n'y ait toujours qu'un nombre fini de telles involutions dans tous les groupes de Coxeter ; et que nous soyons capables de les caractériser en termes de mots. Nous utilisons aussi la caractérisation des éléments CPC pour énumérer les involutions CPC selon leur longueur de Coxeter dans les groupes de Coxeter finis et affines.

### 5.1. Finitude et caractérisation.

**THÉORÈME 5.32.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter et soit  $I(W)$  son sous-ensemble des involutions. L'ensemble  $W^{CPC} \cap I(W)$  est fini. En outre, un élément  $w$  appartient à  $W^{CPC} \cap I(W)$  si et seulement si une (ou de manière équivalente, chacune) de ses décompositions réduites vérifie les deux conditions suivantes : pour tout générateur  $s$  dans  $\text{supp}(w)$ ,  $|\mathbf{w}_s| = 1$ , et pour tout générateur  $t$  tel que  $m_{st} \geq 3$ ,  $|\mathbf{w}_t| = 0$  (ce qui signifie que deux générateurs qui ne commutent pas ne peuvent pas se trouver tous deux dans  $\mathbf{w}$ ).*

**DÉMONSTRATION.** Soient  $w$  une involution CPC,  $s$  un générateur appartenant à  $\text{supp}(w)$  et  $\mathbf{w}$  une expression réduite de  $w$ . Supposons tout d'abord que  $|\mathbf{w}_s| \geq 2$ . Considérons un décalage cyclique  $\mathbf{w}' = s\mathbf{w}_1$  de  $\mathbf{w}$  qui commence par  $s$ . Comme  $w$  et  $s$  sont des involutions,  $\mathbf{w}'$  est aussi l'expression d'une involution. De plus, comme  $w$  est PC,  $\mathbf{w}'$  correspond à un élément PC  $w'$ . D'après [77], un élément PC  $w$  est une involution si et seulement si  $R(w)$  est palindromique, ce qui signifie que  $R(w)$  inclut le miroir de chacun de ses membres. Appliquer ceci à  $\mathbf{w}'$  nous permet de dire que  $\mathbf{w}'$  est équivalent à commutation près à un mot  $s\mathbf{w}_2s$ . Donc un décalage cyclique de  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à  $ss\mathbf{w}_2$ , ce qui est en contradiction avec le caractère cycliquement pleinement commutatif de  $w$ . Ainsi, on a  $|\mathbf{w}_s| = 1$ . On considère comme précédemment  $w'$ . Comme  $R(w')$  est palindromique, on peut en conclure que tous les générateurs de  $\text{supp}(w') = \text{supp}(w)$  commutent avec  $s$ .

Réciproquement, tous les éléments de  $W$  dont les expressions réduites ne contiennent pas deux générateurs qui ne commutent pas l'un avec l'autre sont clairement des involutions CPC.  $\square$

**REMARQUE 5.33.** Une des conséquences du théorème précédent est le fait que le nombre d'involutions CPC dans un groupe de Coxeter dépend seulement des arêtes du diagramme de Coxeter, sans prendre en compte les étiquettes  $m_{st}$ .

**5.2. Énumération dans les types classiques.** Dans ce paragraphe, nous énumérons les involutions CPC dans les types classiques selon leurs longueurs de Coxeter. Si  $W$  est un groupe de Coxeter, nous définissons

$$(147) \quad W^{CPCI}(q) := \sum_{w \in W^{CPC} \cap I(W)} q^{\ell(w)}.$$

**THÉORÈME 5.34.** *Dans les types  $A$ ,  $B$ , et  $\tilde{C}$ , les relations suivantes sont valables pour tout  $n \geq 2$  :*

$$(148) \quad \begin{aligned} A_n^{CPCI}(q) &= B_n^{CPCI}(q) = A_{n-1}^{CPCI}(q) + qA_{n-2}^{CPCI}(q), \\ \tilde{C}_n^{CPCI}(q) &= A_{n+1}^{CPCI}(q), \end{aligned}$$

et  $A_0^{CPCI}(q) = 1$ ,  $A_1^{CPCI}(q) = 1 + q$ . En outre, on peut calculer la fonction génératrice suivante :

$$A^{CPCI}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^{CPCI}(q)x^n = x \frac{1 + qx}{1 - x - qx^2}.$$

**DÉMONSTRATION.** L'égalité  $A_n^{CPCI}(q) = B_n^{CPCI}(q) = \tilde{C}_n^{CPCI}(q)$  découle directement de la Remarque 5.33. Soit  $w$  une involution CPC en type  $A_n$  et fixons  $\mathbf{w}$  l'une de ses décompositions réduites. Si  $s_n$  appartient à  $\text{supp}(w)$ , par le Théorème 5.32,

$s_{n-1}$  n'appartient pas à  $\text{supp}(w)$ , et donc  $\mathbf{w}$  est égal à  $s_n$  concaténé avec une décomposition réduite d'une involution CPC de  $A_{n-2}$ . Si  $s_n$  n'appartient pas à  $\text{supp}(w)$ ,  $w$  est alors une involution CPC de type  $A_{n-1}$ . Ceci établit la relation de récurrence (148). La fonction génératrice se calcule grâce aux techniques classiques, en utilisant (148) et les valeurs initiales  $A_0^{CPCI}(q)$  et  $A_1^{CPCI}(q)$ .  $\square$

En particulier, si  $q \rightarrow 1$ , nous obtenons le nombre d'involutions CPC en type  $A_{n-1}$ , qui est donc le  $(n+1)^{\text{ième}}$  nombre de Fibonacci.

**THÉORÈME 5.35.** *Pour les types  $D$  et  $\tilde{B}$ , les relations suivantes sont valables pour  $n \geq 3$  :*

$$(149) \quad \tilde{B}_{n-1}^{CPCI}(q) = D_n^{CPCI}(q) = D_{n-1}^{CPCI}(q) + qD_{n-2}^{CPCI}(q),$$

$$(150) \quad D_{n+1}^{CPCI}(q) = qA_{n-3}^{CPCI}(q) + (1 + 2q + q^2)A_{n-2}^{CPCI}(q),$$

et  $D_1^{CPCI}(q) := 1$ ,  $D_2^{CPCI}(q) = 1 + 2q + q^2$ ,  $D_3^{CPCI}(q) = 1 + 3q + q^2$ . En outre, nous pouvons calculer la fonction génératrice

$$D^{CPCI}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} D_{n+1}^{CPCI}(q)x^n = \frac{1 + (2q + q^2)x}{1 - x - qx^2}.$$

**DÉMONSTRATION.** À nouveau, l'égalité  $\tilde{B}_{n-1}^{CPCI}(q) = D_n^{CPCI}(q)$  provient de la Remarque 5.33. Pour prouver (150), fixons  $w$  une involution CPC de type  $D_{n+1}$  et  $\mathbf{w}$  une de ses décompositions réduites. Si  $s_1$  appartient à  $\text{supp}(w)$ , d'après le Théorème 5.32,  $s_2, t_1, t_2$  n'appartiennent pas à  $\text{supp}(w)$ , et  $\mathbf{w}$  est égal à  $s_1$  concaténé avec une involution CPC en type  $A_{n-3}$ . Si  $s_1$  n'appartient pas à  $\text{supp}(w)$ ,  $\mathbf{w}$  est la décomposition réduite d'une involution CPC de  $A_{n-1}$  concaténée avec  $t_1, t_2, t_1t_2$  ou rien. Cela montre (150).

En utilisant cela, nous pouvons réécrire la relation de récurrence de l'équation (149) sur les polynômes  $D_n^{CPCI}(q)$  en une relation de récurrence impliquant les polynômes  $A_n^{CPCI}(q)$ ; relation que nous pouvons vérifier grâce à (148) (de la même manière que nous l'avons fait dans la preuve de la Proposition 5.29). La fonction génératrice découle des techniques classiques, en utilisant la relation de récurrence dans la seconde égalité de (149), ainsi que les valeurs initiales données dans le théorème.  $\square$

Si  $q \rightarrow 1$ , nous obtenons le nombre d'involutions cycliquement pleinement commutatives en type  $D_{n+1}$ , qui est donc une suite de type Fibonacci dont les deux valeurs initiales sont 1 et 4.

**THÉORÈME 5.36.** *En type  $\tilde{A}$ , la relation suivante est valable pour  $n \geq 2$  :*

$$(151) \quad \tilde{A}_n^{CPCI}(q) = \tilde{A}_{n-1}^{CPCI}(q) + q\tilde{A}_{n-2}^{CPCI}(q),$$

où  $\tilde{A}_0^{CPCI}(q) := 1$ ,  $\tilde{A}_1^{CPCI}(q) = 1 + 2q$ . De plus, nous pouvons calculer la fonction génératrice

$$\tilde{A}^{CPCI}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n-1}^{CPCI}(q)x^n = x \frac{1 + 2qx}{1 - x - qx^2}.$$

**DÉMONSTRATION.** Soit  $w$  une involution CPC en type  $\tilde{A}_{n-1}$  et soit  $\mathbf{w}$  une de ses expressions réduites. Si  $s_0$  appartient à  $\text{supp}(w)$ , par le Théorème 5.32,  $s_{n-1}$  et  $s_1$  n'appartiennent pas à  $\text{supp}(w)$ , et  $\mathbf{w}$  est égal à  $s_0$  concaténé avec une involution

CPC de type  $A_{n-3}$ . Si  $s_0$  n'appartient pas à  $\text{supp}(w)$ ,  $w$  est une involution CPC en type  $A_{n-1}$ . Cela conduit à la relation :

$$\tilde{A}_{n-1}^{CPCI}(q) = qA_{n-3}^{CPCI}(q) + A_{n-1}^{CPCI}(q).$$

En utilisant ceci, nous pouvons calculer la fonction génératrice  $\tilde{A}^{CPCI}(x)$  en multipliant par  $x^n$ , puis en sommant sur  $n \geq 2$  et en utilisant la fonction génératrice  $A^{CPCI}(x)$  obtenue dans le Théorème 5.34. La relation de récurrence (151) s'ensuit directement de l'expression de  $\tilde{A}^{CPCI}(x)$  sous forme de fraction rationnelle.  $\square$

REMARQUE 5.37. On a aussi la relation

$$q^n \tilde{A}_{n-1}^{CPCI}(1/q^2) = L_n(q),$$

où  $L_n(q)$  est le  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Lucas, ces polynômes étant définis explicitement par (voir la suite A114525 dans [72]) :

$$(152) \quad L_n(q) = 2^{-n}[(q - \sqrt{q^2 + 4})^n + (q + \sqrt{q^2 + 4})^n].$$

Cette égalité peut être prouvée en montrant l'égalité des séries génératrices.

THÉORÈME 5.38. *En type  $\tilde{D}$ , on a la relation suivante pour  $n \geq 4$  :*

$$(153) \quad \tilde{D}_{n+2}^{CPCI}(q) = \tilde{D}_{n+1}^{CPCI}(q) + q\tilde{D}_n^{CPCI}(q),$$

avec  $\tilde{D}_4^{CPCI}(q) = 1 + 5q + 6q^2 + 4q^3 + q^4$  et  $\tilde{D}_5^{CPCI}(q) = 1 + 6q + 10q^2 + 6q^3 + q^4$ . Nous pouvons de plus calculer la fonction génératrice :

$$\tilde{D}^{CPCI}(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \tilde{D}_{n+2}^{CPCI}(q)x^n = x^2 \frac{1 + 5q + 6q^2 + 4q^3 + q^4 + x(q + 4q^2 + 2q^3)}{1 - x - qx^2}.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $w$  une involution en type  $\tilde{D}_{n+2}$  et fixons  $\mathbf{w}$  une de ses décompositions réduites. Si  $s_1$  appartient à  $\text{supp}(w)$ , par le Théorème 5.32,  $s_2$ ,  $t_1$  et  $t_2$  n'appartiennent pas à  $\text{supp}(w)$ , et  $\mathbf{w}$  est égal à  $s_1$  concaténé avec une involution CPC de type  $D_{n-1}$ . Si  $s_1$  n'appartient pas à  $\text{supp}(w)$ ,  $\mathbf{w}$  est une involution CPC de type  $D_n$  concaténé à  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_1t_2$  ou rien. Cela conduit à la relation :

$$\tilde{D}_{n+2}^{CPCI}(q) = qD_{n-1}^{CPCI}(q) + (1 + 2q + q^2)D_n^{CPCI}(q).$$

Nous pouvons utiliser ceci et (149) pour vérifier que (153) est satisfaite. Enfin,  $\tilde{D}^{CPCI}(x)$  est calculée en sommant (153) sur les  $n \geq 4$  et en utilisant les valeurs initiales.  $\square$

Si  $q \rightarrow 1$ , nous obtenons le nombre d'involution CPC en type  $\tilde{D}_{n+2}$ , qui est une suite de type Fibonacci ayant 10 et 7 comme valeurs initiales.





## Automates et éléments cycliquement pleinement commutatifs

*J' travaille à l'Underground Café*

---

Starmania, l'opéra rock, Michel Berger  
(1978)

Ce chapitre continue l'étude des éléments cycliquement pleinement commutatifs. La division en deux chapitres est motivée par le fait que les outils utilisés ici, liés principalement à la théorie des automates finis, sont très différents de ceux utilisés dans le chapitre précédent (on ne parlera par exemple pas de clôtures cylindriques).

Le but principal de ce chapitre est de montrer le Théorème 6.10, qui indique que la série génératrice des éléments cycliquement pleinement commutatifs raffinée par la longueur de Coxeter est toujours une fraction rationnelle. Pour cela, nous utilisons la théorie des automates finis, dont les concepts importants sont rappelés dans la section 1, alors que la section 2 est consacrée à la preuve du Théorème 6.10.

### 1. Théorie des automates finis

Dans cette section, nous rappelons des pré-requis en théorie des automates finis et aucun résultat n'est nouveau. Le lecteur au fait de la théorie des automates finis peut directement passer à la section 2.

**1.1. Langages et expressions régulières.** Nous allons rappeler dans ce paragraphe les notions sur les langages, les expressions régulières, et les fonctions  $\mathbb{N}$ -rationnelles. On pourra consulter [34, 42, 65, 80] pour plus de renseignements.

Un *alphabet*  $\Sigma$  est un ensemble fini non vide. Les éléments d'un alphabet sont usuellement appelés des *lettres*, ou encore des *générateurs*. Un *mot* sur l'alphabet  $\Sigma$  est une suite finie de lettres. On note  $\varepsilon$  le mot vide, et  $\Sigma^*$  l'ensemble des mots de  $\Sigma$ . De façon classique, si  $v$  est un mot de  $\Sigma^*$ , la *longueur* de  $v$  est le nombre de lettres composant  $v$  et est notée  $|v|$ . Le mot vide est de longueur 0. Si  $u$  et  $v$  sont deux mots de  $\Sigma^*$ , alors la *concaténation* de  $u$  et  $v$ , qu'on note simplement  $uv$ , est le mot obtenu en écrivant à la suite les lettres de  $u$  puis celles de  $v$ . La concaténation étant une opération associative admettant pour élément neutre le mot vide, cela muni l'ensemble  $\Sigma^*$  d'une structure de monoïde.

**DÉFINITION 6.1.** Soit  $\Sigma$  un alphabet. Un *langage*  $L$  est une partie de  $\Sigma^*$ .

**EXEMPLE 6.2.** Nous donnons ici plusieurs exemples de langages.

- (i) L'ensemble des éléments de  $\{0, 1\}^*$  qui contiennent autant de 0 que de 1 est un langage.
- (ii) L'ensemble des éléments de  $\{0, 1\}^*$  dans lesquels 0 et 1 alternent est un langage.
- (iii) L'ensemble des mots de la langue française est un langage sur l'alphabet usuel.

- (iv) Soit  $n \geq 1$  un entier. L'ensemble des décompositions réduites d'éléments CPC dans le type  $A_n$  est un langage sur l'alphabet  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ .

Soient  $L$  et  $L'$  deux langages sur un même alphabet  $\Sigma$ . Nous définissons les opérations suivantes, appelées les *opérations rationnelles*, sur les langages :

- (i)  $L \cup M$  est la *réunion* des deux langages  $L$  et  $M$  (on la note aussi  $L + M$ ).
- (ii)  $LM$  est le *produit de concaténation* de  $L$  et  $M$  ; c'est le langage composé des mots de la forme  $uv$ , avec  $u$  dans  $L$  et  $v$  dans  $M$ . On note  $L^1 := L$ , pour tout  $n \geq 2$ ,  $L^n := LL^{n-1}$  et  $L^0 = \{\varepsilon\}$ .
- (iii)  $L^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$  est l'*étoile* du langage  $L$ .

Les langages ont été très étudiés, notamment sous l'impulsion de Marcel Paul Schützenberger, qui s'est intéressé au problème du mot dans certaines classes de langages, et sous celle de Noam Chomsky, qui a proposé la Hiérarchie de Chomsky, qui classe certains langages selon la complexité de leurs grammaires (pour une histoire plus détaillée de la théorie des langages, le lecteur pourra se référer à [59]). Nous allons ici nous intéresser plus particulièrement à une classe de langages de cette hiérarchie, les langages rationnels.

DÉFINITION 6.3. Soit  $\Sigma$  un alphabet. L'ensemble des *langages rationnels*  $\text{Rat}(\Sigma)$  est le plus petit sous-ensemble de  $\Sigma^*$  qui vérifie les conditions suivantes.

- Le langage vide est un langage rationnel.
- Le langage ne contenant que le mot vide est un langage rationnel.
- Pour chaque lettre  $a \in \Sigma$ , le langage ne contenant que le mot  $a$  est un langage rationnel.
- Si  $L$  et  $M$  sont deux langages rationnels, alors  $LM$ ,  $L+M$  et  $L^*$  sont rationnels.

Remarquons que dans la définition précédente, on peut remplacer les trois premières conditions par la condition suivante : tout langage fini est rationnel.

Une méthode simple pour décrire l'ensemble des langages rationnels d'un alphabet utilise l'ensemble des expressions régulières via une correspondance entre ces ensembles.

DÉFINITION 6.4. Soit  $\Sigma$  un alphabet. On définit les *expressions régulières* de la manière suivante :

- $\emptyset$  est une expression régulière représentant le langage vide.
- $\varepsilon$  est une expression régulière représentant le langage contenant uniquement le mot vide.
- Pour  $s \in \Sigma$ ,  $s$  est une expression régulière représentant le langage contenant uniquement le mot  $s$ .
- Si  $\ell$  et  $m$  sont des expressions régulières représentant les langages rationnels  $L$  et  $M$ , alors  $(\ell + m)$ ,  $(\ell m)$ , et  $\ell^*$  sont des expressions régulières représentant  $L + M$ ,  $LM$  et  $L^*$ .

Il n'y a pas de correspondance bijective entre l'ensemble des langages rationnels et l'ensemble des expressions régulières : par exemple,  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + \varepsilon$  sont deux expressions régulières qui représentent le même langage. Cependant, par définition, toutes les expressions régulières représentent un langage rationnel, et tout langage rationnel peut être représenté par une expression régulière.

EXEMPLE 6.5. On donne ici des exemples de langages rationnels.

- Le langage défini dans l'Exemple 6.2 (i) n'est pas rationnel.
- Le langage défini dans l'Exemple 6.2 (ii) est rationnel, car une de ses expressions régulières associée est  $(\varepsilon + \mathbf{1})(\mathbf{01})^*(\varepsilon + \mathbf{0})$ .
- Le langage défini dans l'Exemple 6.2 (iii) est rationnel car il est fini.
- Le langage défini dans l'Exemple 6.2 (iv) est rationnel car il est fini d'après le Théorème 5.19 du chapitre précédent.
- Soit  $n$  un entier. Le langage composé des décompositions réduites d'éléments CPC dans le type  $\tilde{A}_n$  est rationnel d'après le Théorème 5.17 du chapitre précédent.

Si  $L$  est un langage, on définit sa *série génératrice* comme :

$$(154) \quad L(q) := \sum_{v \in L} q^{|v|}.$$

On peut alors classer les séries génératrices de langages rationnels en utilisant la notion de fraction  $\mathbb{N}$ -rationnelle. (Notons qu'une classification similaire existe aussi pour les langages algébriques ou contextuels, mais cela sort du cadre de cette thèse.)

**DÉFINITION 6.6.** L'ensemble des *fractions  $\mathbb{N}$ -rationnelles* est le plus petit ensemble  $\mathcal{F} \in \mathbb{Q}(x)$  vérifiant les conditions suivantes :

- la fonction nulle appartient à  $\mathcal{F}$  ;
- la série formelle  $x$  appartient à  $\mathcal{F}$  ;
- si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{F}$ , alors  $f + g$  et  $fg$  y appartiennent aussi ;
- si  $f$  appartient à  $\mathcal{F}$  et est de terme constant nul, alors la série formelle  $\frac{1}{1-f}$  est dans  $\mathcal{F}$ .

Remarquons qu'en particulier, une fraction  $\mathbb{N}$ -rationnelle est une fraction rationnelle dont tous les coefficients dans le développement de Taylor sont des entiers positifs.

On montre alors le théorème classique suivant.

**THÉORÈME 6.7.** *Soit  $L$  un langage rationnel sur un alphabet  $\Sigma$ . Alors sa série génératrice  $L(q)$  est une fraction  $\mathbb{N}$ -rationnelle.*

**DÉMONSTRATION.** On ne donne ici qu'une esquisse de preuve : il suffit de montrer que chacune des opérations rationnelles présentes dans la Définition 6.3 des langages rationnels se traduisent sur les fractions  $\mathbb{N}$ -rationnelles par les opérations de la Définition 6.6. Cependant, une preuve de ce type n'est pas aisée à formaliser. En pratique, la preuve la plus simple utilise les automates finis, que l'on introduit ci-dessous. □

**1.2. Automates finis.** Il existe de nombreuses autres descriptions des langages rationnels. Nous en présentons une ici, celle qui utilise les automates finis, et que nous utiliserons ensuite dans la section suivante pour étudier les éléments CPC. Les automates finis ont été introduits pour la première fois par McCulloch et Pitts dans [47] en 1943, initialement pour proposer un modèle pour les réseaux de neurones. Von Neumann dans [54] en 1948 et Kleene dans [41] en 1951 ont ensuite formalisé et développé théoriquement cette notion. Cette théorie prit encore plus son envol en 1955 sous l'impulsion de l'article [69] de Schützenberger. Pour plus de détails sur l'histoire de la théorie des automates finis, on pourra consulter [59].

DÉFINITION 6.8. Un *automate fini déterministe complet* est un quintuplet  $(\Sigma, Q, \delta, i_0, F)$  tel que :

- $\Sigma$  est un alphabet ;
- $Q$  est un ensemble fini, appelé ensemble des *états* de l'automate ;
- $\delta$  est la *fonction de transition* de l'automate avec  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  ;
- $i_0$  est un état de l'automate, appelé *état initial* ;
- $F$  est un sous-ensemble de  $Q$  ; les éléments de  $F$  sont appelés des *états finaux*.

Notons que, dans un souci de concision, dans la suite on écrit automate fini pour automate fini déterminisme complet.

Il existe une présentation graphique simple des automates finis.

Si  $A := (\Sigma, Q, \delta, i_0, F)$  est un automate fini, on lui associe de manière bijective un graphe étiqueté et orienté de la manière suivante :

- l'ensemble des sommets du graphe est l'ensemble des états de l'automate ;
- il existe une arête entre deux sommets  $p$  et  $q$  étiquetée par la lettre  $a$ , orientée de  $p$  vers  $q$  si et seulement si  $\delta(p, a) = q$  ;
- l'état initial  $i_0$  est indiqué par une flèche pointant vers le sommet correspondant ;
- les sommets correspondant à un état final sont entourés.

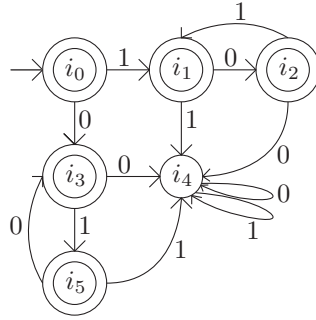


FIGURE 1.1. La représentation graphique d'un automate.

L'automate dont on donne la description graphique dans la Figure 1.1 est un automate sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ , d'ensemble d'états  $Q = \{i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ , d'état initial  $i_0$  et d'états finaux  $F = \{i_0, i_1, i_2, i_3, i_5\}$ . Sa fonction de transition  $\delta$  est représentée dans le tableau suivant.

	0	1
$i_0$	$i_3$	$i_1$
$i_1$	$i_2$	$i_4$
$i_2$	$i_4$	$i_1$
$i_3$	$i_4$	$i_5$
$i_4$	$i_4$	$i_4$
$i_5$	$i_3$	$i_4$

FIGURE 1.2. La fonction de transition de l'automate représenté dans la Figure 1.1.

Le but d'un automate est de lire des mots, et de décider si le mot est accepté ou non. Pour cela, nous étendons la fonction  $\delta$  en une fonction  $\bar{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$  par induction sur la longueur d'un mot  $\mathbf{w} \in \Sigma^*$  :

- $\bar{\delta}(q, \varepsilon) := q$  ;
- si  $s \in \Sigma$ , alors  $\bar{\delta}(q, s\mathbf{w}) := \bar{\delta}(\delta(q, s), \mathbf{w})$ .

De façon informelle, l'idée correspondante dans la représentation graphique des automates est de dire que, partant de l'état initial  $i_0$ , on lit le mot  $\mathbf{w}$  en se déplaçant le long des arêtes à chaque fois qu'on lit une nouvelle lettre. À chaque mot correspond donc un chemin dans le graphe. L'état dans lequel on arrive après avoir lu la dernière lettre est alors  $\bar{\delta}(i_0, \mathbf{w})$ .

On dit alors que le mot  $\mathbf{w} \in \Sigma^*$  est *accepté* par l'automate  $A$  si et seulement si  $\bar{\delta}(i_0, \mathbf{w})$  est un état final de l'automate  $A$ .

Le *langage reconnu* par un automate  $A$  est noté  $L(A)$  et est composé du sous-ensemble des mots acceptés par l'automate  $A$ . Un langage  $L$  est dit *reconnaisable par automates finis* si il existe un automate fini  $A$  tel que  $L(A) = L$ .

Le langage reconnu par l'automate de la Figure 1.1 est le langage défini dans l'Exemple 6.2 (ii). C'est aussi l'ensemble des décompositions réduites des éléments PC en type  $A_2$ , si on remplace 0 par  $s_0$  et 1 par  $s_1$  dans l'alphabet. Remarquons aussi que, si en lisant un mot  $\mathbf{w}$  dans cet automate, on arrive en cours de lecture du mot dans l'état  $i_4$ , l'automate restera alors toujours dans cet état. Un tel état est appelé un *puits*.

L'utilité principale des automates (mais il y en a d'autres) est justement de dire si un mot appartient à un langage donné ou non, et c'est pour cela qu'ils sont utilisés notamment en analyse syntaxique ou dans les compilateurs de langages de programmation.

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés des langages reconnaissables par automates finis ; une caractérisation en a été donnée par Kleene dans [41].

**THÉORÈME 6.9** ([34, Théorème 2.4]). *Soit  $\Sigma$  un alphabet. L'ensemble des langages rationnels  $\text{Rat}(\Sigma)$  est égal à l'ensemble des langages reconnaissables par automates finis d'alphabet  $\Sigma$ .*

Nous ne donnons pas la preuve de ce théorème ici. Notons simplement que l'idée principale de la théorie des automates est de reconnaître si un mot appartient à un langage donné en lisant le mot lettre par lettre en ne se souvenant toujours que d'une quantité bornée d'information ; l'information étant donnée par l'état dans lequel se trouve l'automate après lecture de la lettre courante, et le côté borné étant fourni par le nombre fini d'états.

De même, pour vérifier si un mot appartient à un langage rationnel défini par une expression régulière, il suffit de lire ce mot lettre à lettre, en ne gardant à chaque fois qu'une quantité bornée d'information.

Par exemple, dans l'automate de la Figure 1.1, si en cours de lecture d'un mot, l'automate se trouve dans l'état  $i_1$ , alors l'information dont on dispose est “ jusqu'à présent, on a lu un mot de la forme  $1(01)^*$  ” ; si l'automate se trouve dans l'état  $i_4$  l'information dont on dispose est “ jusqu'à présent, on a lu un mot qui contenait ou bien le sous-mot 00, ou bien le sous-mot 11 ”.

Enfin, pour clore cette présentation succincte de la théorie des automates, notons qu'il existe d'autres versions des automates finis (non-déterministes, avec  $\varepsilon$ -transition, non complets...). Nous avons choisi de ne pas les présenter car ils reconnaissent exactement les mêmes langages que les automates finis que nous avons définis.

## 2. Éléments cycliquement pleinement commutatifs et automates finis

Le but de cette section est d'utiliser la théorie des automates finis ainsi que le Théorème de Kleene pour montrer des résultats sur la série génératrice des éléments CPC d'un groupe de Coxeter. Cette section s'inspire d'une part des Théorèmes 5.17, 5.25, 5.22, 5.28, des deuxièmes et troisièmes sections du chapitre précédent, où on a montré, même si ce n'était pas dans ces termes, que l'ensemble des décompositions réduites d'éléments CPC en types affines  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$  formait un langage rationnel. D'autre part, Brink et Howlett ont dans [11] montré que l'ensemble des décompositions réduites de tous les éléments dans un groupe de Coxeter quelconque est un langage rationnel tandis que Nadeau [49] a montré que l'ensemble des décompositions réduites des éléments PC dans un groupe de Coxeter quelconque est un langage rationnel (la différence avec le cas général de Brink et Howlett vient du fait qu'il faut dans ce cas général se soucier des relations de tresses qui peuvent intervenir dans une expression pour la rendre non réduite, ce qui est impossible pour les éléments PC). Il était naturel alors d'examiner ce problème pour les éléments CPC.

### 2.1. Rationalité de la série génératrice des décompositions réduites.

Nous montrons dans ce paragraphe le résultat principal suivant.

**THÉORÈME 6.10.** *Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. L'ensemble  $L$  des décompositions réduites d'éléments CPC est un langage rationnel sur l'alphabet  $S$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. Pour montrer que l'ensemble  $L$  des décompositions réduites d'éléments CPC est un langage rationnel sur l'alphabet  $S$ , il suffit, d'après le Théorème 6.9 de Kleene, de montrer qu'il existe un automate reconnaissant le langage  $L$ . Nous construisons ici explicitement un tel automate. La preuve se décompose en trois parties, la première décrivant les états de l'automate, la seconde explicitant la construction de l'automate et la troisième se consacrant à montrer les propriétés de cet automate.

#### Description des états

L'alphabet de l'automate est  $S$ . Nous construisons son ensemble des états  $Q$  au fur et à mesure, état par état. Un état  $q = (E_q, E'_q, (CC_{st,q}, CI_{st,q}, B_{st,q}, B_{ts,q})_{s,t}) \in Q$  est défini par la donnée des éléments suivants (nous indiquons aussi de manière informelle les renseignements qui sont encodés par ces états pour aider à la compréhension de la construction de l'automate ; cependant l'énoncé précis des propriétés de cet automate se trouve dans la partie suivante de la preuve) :

- l'ensemble  $E_q$  des lettres de sortie possible, qui indique si on peut lire depuis cet état une lettre  $s$  sans que le mot que l'on lise ne soit non-réduit.
- l'ensemble  $E'_q$  de couples de lettres  $(s, t)$  tels que si on lit la lettre  $s$ , on créerait une chaîne  $st \dots$  ou  $ts \dots$  de longueur  $m_{st}$ . Un tel couple  $(s, t)$  appartenant à  $E'_q$  peut être ou non souligné.
- pour chaque couple de générateurs  $(s, t)$  tels que  $\infty > m_{st} \geq 3$ , deux chaînes de caractères composées de lettres  $s$  et  $t$  pouvant être soulignées ou non, et

deux booléens. (On préfère ici utiliser le terme de chaîne de caractère et non le terme de mot, même si ce sont les mêmes objets, et ce pour deux raisons. Premièrement, afin d'éviter les confusions entre le mot qui est lu par l'automate, et les mots qui définissent l'état. Deuxièmement, parce que ces "chaînes" sont en fait l'équivalent des chaînes dans les empilements.)

La première chaîne est notée  $CC_{st,q}$  ( $CC$  pour "chaîne courante"), et indique la plus longue chaîne de type  $sts\dots$  ou  $tst\dots$  que l'on a lu dans le mot depuis la dernière fois ou on a rencontré un générateur qui ne commute pas avec  $s$  ou  $t$  (on identifie les chaînes  $CC_{st,q}$  et  $CC_{ts,q}$  dans la suite).

La seconde chaîne est notée  $CI_{st,q}$  et indique la plus longue chaîne de type  $sts\dots$  ou  $tst\dots$  que l'on a lu dans le début du mot ( $CI$  abrégant ici chaîne initiale).

Les deux booléens seront notés  $B_{st,q}$  et  $B_{ts,q}$  et indiquent si on peut par la suite ajouter encore un élément  $s$  (respectivement  $t$ ) à la chaîne  $CI_{st}$  (c'est-à-dire que nous n'avons pas encore lu dans le mot de générateur qui ne commute pas avec  $s$  (respectivement  $t$ )).

### Construction de l'automate

Nous décrivons maintenant la construction des états de l'automate, qui sera un processus itératif, à savoir que nous partons d'un état initial, puis nous construisons tous les états qui peuvent être atteints par une transition depuis cet état initial via une certaine procédure décrite ci dessous, et nous recommençons cette procédure sur ces nouveaux états, jusqu'à avoir créé tous les états de l'automate.

Nous partons d'un automate composé de deux états. Le premier est l'état initial  $i_0$  dont l'ensemble  $E_{i_0}$  est égal à  $S$ , l'ensemble  $E'_{i_0}$  est vide, et pour tout couple de générateurs  $(s, t)$  avec  $m_{st} \geq 3$ , les listes  $CC_{st,i_0}$  et  $CC_{ts,i_0}$  sont vides et les booléens  $B_{st,q}$  et  $B_{ts,q}$  sont égaux à Vrai (ce qui signifie qu'on peut depuis l'état initial lire n'importe quel lettre, et qu'on a lu pour l'instant ni chaînes courantes, ni chaînes initiales, et que ces dernières peuvent être complétées). Le second est un état puits, noté  $P$ .

Ensuite, pour tout état  $q$  de l'automate, à l'exception de  $P$ , on applique le processus suivant.

- Pour tout générateur  $s$  de  $S$  qui ne se trouve pas dans  $E_q$  ou qui est la première composante d'un couple de  $E'_q$  (éventuellement soulignée), on ajoute une arête partant de l'état  $q$ , arrivant dans l'état puits  $P$  et étiquetée par  $s$  (on a lu un mot non-réduit ou un mot contenant une chaîne  $sts\dots$  de longueur  $m_{st}$ ).
- Sinon on crée un nouvel état  $r$ , défini comme suit.

L'ensemble  $E_r$  est égal à l'ensemble  $E_q$  privé de  $s$  et dans lequel on ajoute tous les générateurs de  $S$  qui ne commutent pas avec  $s$ .

Pour tous les générateurs  $t$  de  $S$  qui ne commutent pas avec  $s$ , si  $B_{st,q} = \text{Vrai}$ , alors la chaîne  $CI_{st,r}$  est égale à la concaténation de  $CI_{st,q}$  et de  $s$  et la chaîne  $CC_{st,r}$  est égale à la concaténation de  $CC_{st,q}$  et de  $s$  souligné. Si  $B_{st,q} = \text{Faux}$ , alors  $CI_{st,r} = CI_{st,q}$  et la chaîne  $CC_{st,r}$  est égale à la concaténation de  $CC_{st,q}$  et de  $s$  non souligné. Dans les deux cas, on pose  $B_{st,r} := B_{st,q}$  et  $B_{ts,q} := B_{ts,r}$ .

Si ni  $t$  ni  $u$  ne commutent avec  $s$  alors la chaîne  $CC_{tu,r}$  est vide. On pose  $B_{tu,r} := \text{Faux}$ ,  $B_{ut,r} := \text{Faux}$ , et  $CI_{tu,r} := CI_{tu,q}$ .

Si  $t$  et  $u$  commutent avec  $s$ , alors la chaîne  $CC_{tu,r}$  est égale à la chaîne  $CC_{tu,q}$ . On pose  $B_{tu,r} := B_{tu,q}$ ,  $B_{ut,r} := B_{ut,q}$ , et  $CI_{tu,r} := CI_{tu,q}$ .



Si  $t$  ne commute pas avec  $s$  et que  $u$  commute avec  $s$ , alors si la chaîne  $CC_{tu,q}$  se termine par  $t$  (souligné ou non) alors  $CC_{tu,r}$  est vide, et on pose  $B_{tu,r} := Faux$ ,  $B_{ut,r} := B_{ut,q}$ , et  $CI_{tu,r} := Ci_{tu,q}$ . Si la chaîne  $CC_{tu,q}$  se termine par  $u$  souligné alors  $CC_{tu,r}$  est composée de  $u$  souligné, et on pose  $B_{tu,r} := Faux$ ,  $B_{ut,r} := Faux$ , et  $CI_{tu,r} := Ci_{tu,q}$ . Si la chaîne  $CC_{tu,q}$  se termine par  $u$  non souligné alors  $CC_{tu,r}$  est composée de  $u$  non souligné, et on pose  $B_{tu,r} := Faux$ ,  $B_{ut,r} := Faux$ , et  $CI_{tu,r} := Ci_{tu,q}$ .

L'ensemble  $E'_r$  est égal à l'ensemble  $E'_q$  dans lequel on supprime tous les couples dont la première composante ne commute pas avec  $s$ , et auquel on ajoute tous les couples  $(t, s)$  tels que  $t$  soit un générateur ne commutant pas avec  $s$  et tels que  $CC_{st,r}$  soit de longueur  $m_{st} - 1$ . Dans le cas où le  $s$  qui vient d'être ajouté à  $CC_{st,r}$  est souligné, alors le couple  $(t, s)$  est aussi souligné dans  $E'_r$ .

On a maintenant fini de décrire  $r$ . Si  $r$  est égal à un état  $r'$  déjà présent dans l'automate, alors on supprime l'état  $r$  et on ajoute une arête partant de  $q$  et allant vers  $r'$  étiquetée par  $s$ . Si non, on ajoute une arête partant de  $q$  et allant vers  $r$  étiquetée par  $s$ .

Ce processus est fini car on ne peut créer qu'un nombre fini d'états différents. En effet, il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles  $E_q$  et  $E'_q$ , il y a un nombre fini de booléens  $B_{st}$ , qui ne peuvent chacun prendre que deux valeurs, et il y a un nombre fini de chaînes de types  $CC_{st}$  et  $CI_{st}$ , qui sont de longueurs au plus  $m_{st} - 1$  par construction de l'automate.

Pour terminer la construction de l'automate, il ne reste plus qu'à définir les états finaux. Ce sont les états  $q$  tels les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tous les couples de générateurs  $(s, t)$  avec  $m_{st} \geq 3$ , la concaténation de la chaîne  $CC_{st,q}$ , dans laquelle on a supprimé toutes les lettres soulignées, et de la chaîne  $CI_{st,q}$  est de longueur inférieure ou égale à  $m_{st} - 1$  et ne contient pas de facteur  $ss$  ou  $tt$  ;
- si un couple  $(s, t)$  appartient à  $E'_q$  et n'est pas souligné, alors la chaîne initiale  $CI_{st,q}$  commence par  $t$  ou est vide.

### Propriétés de l'automate

L'automate ainsi construit vérifie les propriétés suivantes. Si  $r$  est un état de l'automate différent du puits, que  $\mathbf{w}$  est un mot de  $S^*$ , et qu'on a  $\delta(i_0, \mathbf{w}) = r$ , alors :

- (i) le mot  $\mathbf{w}$  est réduit, et l'ensemble  $E_q$  est l'ensemble des lettres de  $S$  telles que le mot  $\mathbf{w}s$  soit toujours réduit.
- (ii) L'ensemble  $E'_r$  contient le couple  $(s, t)$  si et seulement si le mot  $\mathbf{w}s$  est équivalent à commutation près à un mot contenant une chaîne alternante de  $t$  et de  $s$  de longueur  $m_{st}$ . Le couple  $(s, t)$  est souligné si et seulement si la chaîne alternante de  $s$  et  $t$  de longueur  $m_{st} - 1$  présente à commutation près dans  $\mathbf{w}$  est aussi la chaîne initiale  $CI_{st,r}$ .
- (iii) Dans  $CC_{st,r}$ , les lettres soulignées sont toutes au début de la chaîne de caractère. Une lettre  $s$  est soulignée dans  $CC_{st,r}$  si et seulement lors de la construction de l'état  $r$ , la lettre  $s$  a été ajoutée à la fois à  $CC_{st,r}$  et à  $CI_{st,r}$ .
- (iv) Soit  $(s, t)$  un couple de générateurs ne commutant pas. Le mot  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à un mot de la forme  $\mathbf{w}_1 CC_{st,r}$  avec  $\mathbf{w}_1 \in S^*$ , et

$CC_{st,r}$  est maximale : il n'y a pas de chaîne  $C$  formée de lettre  $s$  et  $t$  de longueur supérieure à  $CC_{st,r}$  telle que  $\mathbf{w}$  soit équivalent à commutation près à  $\mathbf{w}'_1 C$  avec  $\mathbf{w}'_1 \in S^*$ .

- (v) Le mot  $\mathbf{w}$  correspond à un élément pleinement commutatif.
- (vi) Soit  $(s, t)$  un couple de générateurs ne commutant pas. Si on note  $D$  la chaîne de caractère  $CC_{st,r}$  dans laquelle on a supprimé les lettres soulignées, alors le mot  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à un mot de la forme  $CI_{st,q}\mathbf{w}_2D$ , où  $\mathbf{w}_2$  est un mot de  $S^*$ . Cette décomposition est maximale, dans le sens où si le mot  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à un mot de la forme  $\mathbf{w}_3\mathbf{w}_4\mathbf{w}_5$  avec  $\mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  des mots composés uniquement de lettres  $s$  et  $t$ , alors  $|\mathbf{w}_5\mathbf{w}_3| \leq |DCI_{st,r}|$ .
- (vii) Si de plus  $r \in F$ , alors  $\mathbf{w}$  correspond à un élément cycliquement pleinement commutatif. Si  $r \notin F$ , alors  $\mathbf{w}$  ne correspond pas à un élément CPC.
- (viii) En outre, si  $\mathbf{w}$  est un mot de  $S^*$  et que  $\bar{\delta}(i_0, \mathbf{w}) = P$ , alors  $\mathbf{w}$  n'est pas réduit ou  $\mathbf{w}$  ne correspond pas à un élément PC.

La propriété (iii) est immédiate d'après la construction de l'automate ; on ne rajoute des lettres soulignées qu'en début de mot, ou après une lettre soulignée.

Les propriétés (i), (ii), (iv), (v), (vi) se prouvent par récurrence sur la longueur du mot  $\mathbf{w}$ . Ces cinq propriétés sont vérifiées si  $\mathbf{w}$  est le mot vide. Sinon, nous écrivons  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'u$ , avec  $\mathbf{w}'$  un mot de  $S^*$  et  $u$  un générateur. Notons  $q := \bar{\delta}(i_0, \mathbf{w}')$ , par définition on a alors  $\delta(q, u) = r$ .

Nous prouvons d'abord (i). Par hypothèse de récurrence, l'ensemble  $E_q$  contient les lettres  $s$  telles que le mot  $\mathbf{w}'s$  soit réduit. Par construction des transitions issues de l'état  $q$ , et vu que  $r$  n'est pas le puits par hypothèse, la lettre  $u$  appartient à  $E_q$ . Le mot  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'s$  est donc réduit, et de plus, l'ensemble des lettres  $t$  telles que  $\mathbf{w}t$  soit réduit est égal à  $E_q$  privé de  $u$  et auquel on ajoute tous les générateurs qui ne commutent pas avec  $u$ , soit exactement l'ensemble  $E_r$ . Ceci prouve (i).

Prouvons maintenant (iv). Soit  $(s, t)$  un couple de générateurs ne commutant pas. L'hypothèse de récurrence nous assure que  $\mathbf{w}'$  est équivalent à commutation près à un mot  $\mathbf{w}'_1 CC_{st,q}$ , et que cette décomposition est maximale.

Si  $u$  est un générateur différent de  $s$  et de  $t$  et que  $u$  commute avec  $s$  et  $t$ , alors  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'u$  est équivalent à commutation près à  $\mathbf{w}_1 CC_{st,q}$  si on pose  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}'_1 u$ , et cette décomposition est maximale. De plus, par construction de l'automate, on a  $CC_{st,q} = CC_{st,r}$ .

Si  $u$  est un générateur différent de  $s$  et de  $t$  et que  $u$  ne commute ni avec  $s$  ni avec  $t$ , alors si  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à un mot de la forme  $\mathbf{w}_1 C$  avec le mot  $C$  composé uniquement de  $s$  et de  $t$ , on a  $C = \varepsilon$ . Mais par construction de l'automate, dans ce cas,  $CC_{st,r} = \varepsilon$ .

Si  $u$  est un générateur différent de  $s$  et de  $t$  et que  $u$  commute avec  $s$  mais pas avec  $t$ , deux cas sont possibles. Si  $CC_{st,q}$  se termine par  $s$ , alors  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à  $\mathbf{w}'_1 CC_{st,q}u$ , et donc aussi à  $\mathbf{w}_1 s$  avec  $\mathbf{w}_1$  un mot ; et cette dernière décomposition est maximale. Par construction de l'automate, dans ce cas, on a  $CC_{st,r} = s$ . Si  $CC_{st,q}$  se termine par  $t$ , alors  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à  $\mathbf{w}'_1 CC_{st,q}u$ . Le plus grand mot  $C$  composé de  $s$  et de  $t$  tel que l'on ait  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 C$  est alors vide, et on a bien dans ce cas  $CC_{st,r} = \varepsilon$ .

Si  $u$  est égal à  $s$ , alors nécessairement le mot  $CC_{st,q}$  est vide ou se termine par  $t$ . En effet,  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à  $\mathbf{w}'_1 CC_{st,q}s$ . Si  $CC_{st,q}$  ne se termine pas par  $t$  (ou est vide),  $\mathbf{w}$  est non réduit ce qui est une contradiction avec

la propriété (i). Le fait que  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à  $\mathbf{w}'_1 CC_{st,q} s$ , que cette décomposition soit maximale par hypothèse de récurrence, et que l'on ait par construction de l'automate  $CC_{st,r} = CC_{st,q} s$  termine la preuve de (iv).

La preuve de (vi) étant très similaire à celle de (iv), à savoir que l'on étudie précisément ce qui se passe suivant la nature de la lettre  $u$ , on ne la détaille pas ici. Notons simplement que les lettres soulignées sont présentes ici pour éviter que nous utilisions une même lettre à la fois dans la chaîne initiale  $CI_{st,r}$  et dans la chaîne courante  $CC_{st,r}$  dans les cas où toutes les lettres du mot commutent avec  $s$  et  $t$ .

Nous prouvons (ii). Supposons que le couple  $(s, t)$  appartienne à  $E'_r$ . Deux cas sont possibles d'après la construction de l'automate. Ou bien le couple  $(s, t)$  appartient aussi à  $E_q$ . Dans ce cas, par construction de  $E_r$ , on en déduit que  $u$  commute avec  $s$ . Par hypothèse de récurrence le mot  $\mathbf{w}'s$  contient à commutation près une chaîne alternante de  $s$  et  $t$  de longueur  $m_{st}$ . C'est aussi le cas de  $\mathbf{w}'su$  car  $u$  commute avec  $s$ . Ou bien le couple  $(s, t)$  est tel que  $CC_{st,q}$  est de longueur  $m_{st} - 1$  et se termine par  $t$ , la propriété (iv) déjà démontrée nous assure que  $\mathbf{w}s$  est équivalent à commutation près à  $\mathbf{w}_1 CC_{st,q} s$ . La réciproque se fait de manière similaire.

Nous montrons maintenant (v). Supposons par l'absurde que  $\mathbf{w}$  ne soit pas PC. Comme  $\mathbf{w}'$  est PC par hypothèse de récurrence, deux cas peuvent se produire. Ou bien  $\mathbf{w}$  n'est pas réduit, ce qui est exclu par la propriété (i), ou bien le mot  $\mathbf{w} = \mathbf{w}'u$  est équivalent à commutation près à un mot contenant une chaîne alternante de  $t$  de  $s$  de longueur  $m_{st}$ , c'est-à-dire que  $u$  appartient à  $E'_q$ . Mais dans ce cas, par construction de l'automate, la transition partant de l'état  $q$  par la lettre  $u$  aboutit au puits, ce qui est une contradiction.

Nous montrons ici (vii). Supposons que  $r$  soit un état final. Par la propriété (iii), on sait que le mot  $\mathbf{w}$  est pleinement commutatif, aucune chaîne alternante de  $s$  et  $t$  de longueur  $m_{st}$  n'est donc lue dans le mot  $\mathbf{w}$ . La seule raison qui peut empêcher  $\mathbf{w}$  de correspondre à un élément CPC serait l'existence d'un décalage cyclique de  $\mathbf{w}$  qui ne serait pas réduit, ou bien non PC. La restriction sur les couples de  $E'_r$  nous assure que l'on ne peut compléter une chaîne de longueur  $m_{st} - 1$  en  $s$  et de  $t$  se terminant par  $s$  et suivie par la suite de générateurs ne commutant pas avec  $s$  (ce qui a pour effet que  $CC_{st,r}$  soit vide) avec un générateur  $t$  qui se trouve au début du mot. Par la propriété (vi) (et avec les notations de cette dernière), on sait que pour tout couple de générateurs  $(s, t)$  ne commutant pas, le mot  $\mathbf{w}$  est équivalent à commutation près à  $CI_{st,r} \mathbf{w}_2 D$ , et cette décomposition est maximale. Par définition des états finaux de l'automate, on a aussi  $DCI_{st,r} \geq m_{st} - 1$ . Ceci assure que l'on ne peut pas, en utilisant des décalages cycliques, créer une chaîne  $stst \dots$  de longueur  $m_{st}$ . Le mot  $\mathbf{w}$  correspond donc à un élément CPC si  $r$  est un état final. Inversement, si l'état  $r$  n'est pas final, une des conditions ci-dessus n'est pas vérifiée, et on vérifie alors qu'un décalage cyclique de  $\mathbf{w}$  n'est pas PC.

Enfin, la propriété (viii) est immédiate en remarquant que le seul moyen d'arriver dans l'état puits est, par construction, ou bien de lire à partir d'un état  $q$  une lettre qui n'est pas dans  $E_q$  et dans ce cas le mot  $\mathbf{w}$  n'est pas réduit par (i), ou bien de lire à partir d'un état  $q$  une lettre  $s$  qui est la première composante d'un couple de  $E'_q$ , et dans ce cas le mot  $\mathbf{w}$  n'est pas PC par la propriété (ii). □

De ce Théorème 6.10, on peut déduire plusieurs corollaires.

COROLLAIRE 6.11. *Soit  $W$  un groupe de Coxeter. La série génératrice des décompositions réduites des éléments CPC de  $W$  est une fraction  $\mathbb{N}$ -rationnelle.*

DÉMONSTRATION. La preuve est immédiate en utilisant les deux Théorèmes 6.7 et 6.10.  $\square$

On peut aussi retrouver un théorème dû à Nadeau.

COROLLAIRE 6.12. *Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. L'ensemble  $L$  des décompositions réduites d'éléments PC est un langage rationnel sur l'alphabet  $S$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. On construit un automate  $A$  exactement de la même manière que dans la preuve du Théorème 6.10, à la seule différence qu'on définit l'ensemble des états finaux comme étant l'ensemble de tous les états excepté le puits. Par les propriétés (i), (iii) et (vii) de la preuve du Théorème 6.10, cet automate reconnaît l'ensemble des décompositions réduites des éléments PC de  $W$ .  $\square$

Remarquons cependant que l'automate que nous proposons ainsi pour reconnaître les éléments PC aura surement plus d'états que celui proposé par Nadeau, étant donné que nos états encodent beaucoup d'informations qui sont inutiles pour déterminer si un élément est PC.

**2.2. Rationalité de  $W^{CPC}$ .** Si  $W$  est un groupe de Coxeter, nous nous intéressons ici à la nature de la série génératrice des éléments CPC  $W^{CPC}(q)$  définie à la section 3 du chapitre précédent.

On aura pour cela besoin du résultat suivant, dû à Brink et Howlett (1993). Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. Ordonnons  $S$  par un ordre total, qui induit un ordre lexicographique sur l'ensemble des mots  $S^*$ . On dit qu'une décomposition réduite  $\mathbf{w}$  d'un élément  $w \in W$  est *minimale* si pour toute autre décomposition réduite  $\mathbf{w}'$  de  $w$ ,  $\mathbf{w}'$  est plus grande que  $\mathbf{w}$  dans l'ordre lexicographique.

THÉORÈME 6.13 ([11, Proposition 3.3]). *Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. Ordonnons  $S^*$ , l'ensemble des mots composés par des lettres dans  $S$ , par un ordre lexicographique. L'ensemble des décompositions réduites minimales des éléments  $w \in W$  est reconnaissable par automate fini.*

On peut alors montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 6.14. *Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. La série génératrice  $W^{CPC}(q)$  est une fraction  $\mathbb{N}$ -rationnelle.*

DÉMONSTRATION. Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter. Nous ordonnons  $S$  par un ordre lexicographique quelconque.

Le langage  $L_1$  composé des décompositions réduites minimales des éléments  $w \in W$  est reconnaissable par automates finis, d'après le Théorème 6.13.

Le langage  $L_2$  composé des décompositions réduites d'éléments CPC est aussi reconnaissable par automates finis d'après le Théorème 6.10.

Les langages reconnaissables par automates finis étant stables par intersection (voir [34, Théorème 3.3]), le langage  $L_1 \cap L_2$  est reconnaissable par automates finis. Ce langage est composé exactement d'une décomposition réduite pour chacun des éléments CPC de  $W$  (celle qui est minimale). Il s'ensuit par le Théorème 6.7 que la série génératrice  $W^{CPC}(q)$  est une fraction  $\mathbb{N}$ -rationnelle.  $\square$



## CHAPITRE 7

### Perspectives

*Ce n'est pas la fin. Ce n'est même pas le commencement de la fin. Mais c'est peut-être la fin du commencement.*

---

Winston S. C. Churchill (1942)

Dans ce chapitre, nous brossons le tableau des questions qui ont été soulevées par cette thèse. À l'image de celle-ci, ce chapitre est divisé en deux sections, l'une traitant des questions sur les formules de type Nekrasov–Okounkov, et l'autre traitant ce qui concerne les éléments cycliquement pleinement commutatifs.

#### Formules de type Nekrasov–Okounkov

Nous commençons par présenter les questions restantes sur les formules de type Nekrasov–Okounkov.

Comme nous l'avons vu à la fin du chapitre 3, il est possible d'obtenir une preuve algébrique des Théorèmes 3.1 et 3.24, grâce à des résultats de King [39] et El Samra–King [18]. De plus, dans [39, Équations (5.8a) à (5.8j)], King donne plusieurs équations, qui une fois spécialisées en  $x_i = 1$ , correspondent à des identités de Macdonald, mais comme souligné par King, la preuve algébrique de cette correspondance est un peu délicate. Il est donc naturel de se demander si notre méthode utilisée dans les cas des types  $\tilde{C}$  et  $\tilde{C}^\sim$  pourrait s'appliquer dans les autres cas et ainsi fournir une explication purement combinatoire de cette correspondance. En particulier, l'équation (5.8a), correspond au type  $\tilde{D}$ , et une interprétation combinatoire dans ce type serait particulièrement intéressante.

Un autre problème, qui se posera une fois de telles interprétations combinatoires obtenues, serait alors de généraliser les équations (5.8a) à (5.8j) de King en utilisant la décomposition de Littlewood comme nous avons pu le faire dans le cadre du chapitre 4. Il sera alors peut-être nécessaire de prouver de nouvelles propriétés de cette décomposition, suivant les partitions et les statistiques qui apparaîtront dans ces interprétations.

En outre, dans [16], Han et Dehay ont généralisé l'égalité de Nekrasov–Okounkov (9) d'une autre manière, en introduisant une fonction de poids  $\tau$ , et permettant ainsi d'unifier les deux formules de Macdonald en type  $\tilde{A}$ . Il serait naturel d'essayer d'effectuer le même processus avec nos Théorèmes 3.1 et 3.24.

On peut aussi se demander s'il existe une preuve de (12) similaire à ce qui est fait dans [36], *i.e.* en utilisant une éventuelle “formule de Cauchy symplectique” (par exemple celle due à Sundaram [81]) pour les fonctions de Schur.

D'un point de vue plus axé sur la théorie des nombres, on peut s'interroger sur la possibilité de déduire de (68) des congruences “à la Ramanujan” sur le nombre

de partitions à parts doublées distinctes, comme cela fut fait à partir de (9) dans [13, 38] pour les partitions.

Enfin, inspiré par la *formule des équerres pointées* (voir [26, Théorème 2.3]), Stanley a démontré dans [75] que si  $F$  est une fonction symétrique quelconque et si on définit

$$\Phi_n(F) := \sum_{|\lambda|=n} \left( \prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} h^{-1} \right) F(h^2 : h \in \mathcal{H}(\lambda)),$$

alors  $\Phi_n(F)$  est une fonction polynômiale en  $n$ . De la même manière, en s'inspirant des Corollaires 4.16–4.18, on peut se demander si une propriété semblable, qui impliquerait les deux statistiques  $h\varepsilon_h$  et  $\delta_\lambda$ , pourrait être vraie.

### Éléments cycliquement pleinement commutatifs

Nous abordons maintenant des questions ouvertes concernant les éléments cycliquement pleinement commutatifs.

Dans les sections 3 et 4 du chapitre 5, nous avons obtenu deux  $q$ -analogues du nombre d'éléments CPC dans les types finis. Le premier, en type  $A$ , énumère aussi les permutations évitant les motifs 321 et 3412 selon leurs longueurs de Coxeter (voir [82]). Le second, en type  $D$ , est apparemment nouveau. On peut se demander si il énumère aussi d'autres objets combinatoires, notamment en termes de permutations associées au type  $D$  (à savoir les permutations signées ayant un nombre pair de signes  $-$ ).

Nadeau a classifié dans [49] les groupes de Coxeter tels que les coefficients de la série génératrice des éléments pleinement commutatifs raffinée par la longueur soient ultimement périodiques via des considérations sur les diagrammes de Coxeter. Comme on a pu le constater dans les sections 3 et 4 du chapitre 5, les coefficients des séries génératrices des éléments cycliquement pleinement commutatifs en type finis et affines sont ultimement périodiques. La question se pose de savoir si il existe une classification analogue à celle de Nadeau pour les éléments CPC et si la réponse est affirmative, il serait intéressant de comparer ces deux classifications.

Un cas particulier de groupes de Coxeter possède généralement des propriétés plus simples que les groupes de Coxeter généraux, il s'agit des groupes de Coxeter simplement lacés (c'est à dire qu'il n'y a que des arêtes simples, sans étiquette, dans le diagramme de Coxeter du groupe). Étant donné que la caractérisation qu'on a donnée des éléments est très dépendante des valeurs de la matrice de Coxeter, on peut se demander si l'étude des éléments CPC ne serait pas beaucoup plus simple dans ce cas simplement lacé.

Rappelons qu'une des motivations originelle pour l'énumération des involutions pleinement commutatives est que leur cardinal est pour certains groupes la somme des dimensions des représentations irréductibles d'un quotient naturel de l'algèbre d'Iwahori–Hecke associée au groupe. Il est donc légitime de se demander si une telle propriété pourrait exister pour les involutions cycliquement pleinement commutatives. Cela pourrait notamment conduire à découvrir de nouveaux quotients intéressants des algèbres d'Iwahori–Hecke.

Quelques questions se posent encore sur l'automate défini au chapitre 6. Tout d'abord, rappelons que si  $L$  est un langage rationnel, on sait qu'il existe un unique automate  $A$  ayant un nombre minimal d'états. (La propriété difficile ici est bien

entendu l'unicité, elle fut établie pour la première fois par Myhill et Nérøde dans [48, 53] en utilisant la congruence qui porte désormais leurs noms.) Il serait donc naturel de s'interroger sur le caractère minimal ou non de l'automate construit dans la preuve du Théorème 6.10. Un autre problème serait de calculer le nombre d'états de l'automate minimal (c'est-à-dire le nombre de classes de la congruence de Myhill-Nérøde).





## Bibliographie

- [1] Jaclyn ANDERSON : Partitions which are simultaneously  $t_1$ - and  $t_2$ -core. *Discrete Math.*, 248(1-3):237–243, 2002.
- [2] Vladimir ANĪSIMOV et Donald E. KNUTH : Inhomogeneous sorting. *Internat. J. Comput. Inform. Sci.*, 8(4):255–260, 1979.
- [3] Drew ARMSTRONG, Christopher R. H. HANUSA et Brant C. JONES : Results and conjectures on simultaneous core partitions. *European J. Combin.*, 41:205–220, 2014.
- [4] Nick BARTLETT : *Modified Hall-Littlewood polynomials and characters of affine Lie algebras*. Thèse de doctorat, University of Queensland, 2013.
- [5] Nick BARTLETT et S. Ole WARNAAR : Hall-Littlewood polynomials and characters of affine Lie algebras. *Adv. Math.*, 285:1066–1105, 2015.
- [6] Alexander BERKOVICH et Frank G. GARVAN : The BG-rank of a partition and its applications. *Adv. in Appl. Math.*, 40(3):377–400, 2008.
- [7] Riccardo BIAGIOLI, Frédéric JOUHET et Philippe NADEAU : Fully commutative elements in finite and affine Coxeter groups. *Monatsh. Math.*, 178(1):1–37, 2015.
- [8] Anders BJÖRNER et Francesco BRENTI : *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2005.
- [9] Tomas BOOTHBY, Jeffrey BURKERT, Morgan EICHWALD, Dana C. ERNST, Richard M. GREEN et Matthew MACAULEY : On the cyclically fully commutative elements of Coxeter groups. *J. Algebraic Combin.*, 36(1):123–148, 2012.
- [10] Nicolas BOURBAKI : *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [11] Brigitte BRINK et Robert B. HOWLETT : A finiteness property and an automatic structure for Coxeter groups. *Math. Ann.*, 296(1):179–190, 1993.
- [12] William H. BURGE : Four correspondences between graphs and generalized Young tableaux. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 17:12–30, 1974.
- [13] Dan COLLINS et Sally WOLFE : Congruences for Han’s generating function. *Involve*, 2009.
- [14] Harold S. M. COXETER : Discrete groups generated by reflections. *Ann. of Math. (2)*, 35(3): 588–621, 1934.
- [15] Harold S. M. COXETER : The complete enumeration of finite groups of the form  $r_i^2 = (r_i r_j)^{k_{ij}} = 1$ . *J. London Math. Soc.*, 10:21–25, 1935.
- [16] Paul-Olivier DEHAYE et Guo-Niu HAN : A multiset hook length formula and some applications. *Discrete Math.*, 311(23):2690–2702, 2011.
- [17] Mike DEVELIN, Matthew MACAULEY et Victor REINER : Toric partial orders. Prépublication arXiv :1211.4227, 18 pages, 2012.
- [18] N. EL SAMRA et Ronald C. KING : Dimensions of irreducible representations of the classical Lie groups. *J. Phys. A*, 12(12):2317–2328, 1979.
- [19] Leonhard EULER : *Introductio in analysin infinitorum. Tomus primus*. Marcum-michaelem Bousquet, Lausannae, 1748.
- [20] Chenteh. K. FAN : *A Hecke algebra quotient and properties of commutative elements of a Weyl group*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1995. Thesis (Ph.D.)—Massachusetts Institute of Technology.

- [21] Chenteh K. FAN : A Hecke algebra quotient and some combinatorial applications. *J. Algebraic Combin.*, 5(3):175–189, 1996.
- [22] Chenteh K. FAN : Structure of a Hecke algebra quotient. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(1):139–167, 1997.
- [23] Fabian FRANKLIN et James J. SYLVESTER : A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion. *Amer. J. Math.*, 5:251–330, 1882.
- [24] Frank GARVAN, Dongsu KIM et Dennis STANTON : Cranks and t-cores. *Invent. Math.*, 101(1):1–17, 1990.
- [25] J. J. GRAHAM : *Modular Representations of Hecke Algebras and Related Algebras*. Thèse de doctorat, university of Sydney, 1995.
- [26] Guo-Niu HAN : Some conjectures and open problems on partition hook lengths. *Exp. Math.*, 18(1):97–106, 2009.
- [27] Guo-Niu HAN : Hook lengths and shifted parts of partitions. *Ramanujan J.*, 23(1-3):127–135, 2010.
- [28] Guo-Niu HAN : The Nekrasov-Okounkov hook length formula : refinement, elementary proof, extension and applications. *Ann. Inst. Fourier*, 60:1–29, 2010.
- [29] Guo-Niu HAN et Kathy JI : Combining hook length formulas and BG-ranks for partitions via the Littlewood decomposition. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363(2):1041–1060, 2011.
- [30] Christopher R. H. HANUSA et Brant C. JONES : The enumeration of fully commutative affine permutations. *European J. Combin.*, 31(5):1342–1359, 2010.
- [31] Christopher R. H. HANUSA et Rishi NATH : The number of self-conjugate core partitions. *J. Number Theory*, 133(2):751–768, 2013.
- [32] Christopher R.H. HANUSA et Brant C. JONES : Abacus models for parabolic quotients of affine Weyl groups. *J. Algebra*, 361:134–162, 2012.
- [33] Godfrey H. HARDY et Srinivasa RAMANUJAN : Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proc. London Math. Soc.*, 2(43):75–117, 1918.
- [34] John E. HOPCROFT et Jeffrey D. ULLMAN : *Introduction to automata theory, languages, and computation*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1979. Addison-Wesley Series in Computer Science.
- [35] James E. HUMPHREYS : *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [36] Amer IQBAL, Shaheen NAZIR, Zahid RAZA et Zain SALEEM : Generalizations of Nekrasov-Okounkov identity. *Ann. Comb.*, 16(4):745–753, 2012.
- [37] Gordon JAMES et Adalbert KERBER : *The representation theory of the symmetric group*, volume 16 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981.
- [38] William J. KEITH : Polynomial analogues of Ramanujan congruences for Han’s hooklength formula. *Acta Arith.*, 160(4):303–315, 2013.
- [39] Ronald C. KING : *S-functions and characters of Lie algebras and superalgebras*. In *Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988)*, volume 19 de *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 226–261. Springer, New York, 1990.
- [40] Ronald C. KING : Some notes on specialisations of Macdonald identities. Communication privée, 2015.
- [41] Stephen C. KLEENE : Representation of events in nerve nets and finite automata. In *Automata studies*, Annals of mathematics studies, no. 34, pages 3–41. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [42] Donald E. KNUTH : *The art of computer programming. Vol. 3*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1998. Sorting and searching, Second edition.
- [43] Neal KOBLITZ : *Introduction to elliptic curves and modular forms*, volume 97 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Second edition, 1993.

- [44] Bertram KOSTANT : Powers of the Euler product and commutative subalgebras of a complex simple Lie algebra. *Invent. Math.*, 158(1):181–226, 2004.
- [45] Ian G. MACDONALD : Affine root systems and Dedekind’s  $\eta$ -function. *Invent. Math.*, 15:91–143, 1972.
- [46] Timothée MARQUIS : Conjugacy classes and straight elements in Coxeter groups. *J. Algebra*, 407:68–80, 2014.
- [47] Warren S. MCCULLOCH et Walter PITTS : A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bull. Math. Biophys.*, 5:115–133, 1943.
- [48] John R. MYHILL : Finite automata and representation of events. *Fund. Concepts in the Theory of Systems*, 1957.
- [49] Philippe NADEAU : Rational generating function for fully commutative elements. Communication privée, 2015.
- [50] Tadashi NAKAYAMA : On some modular properties of irreducible representations of a symmetric group. I. *Jap. J. Math.*, 18:89–108, 1941.
- [51] Rishi NATH : On the  $t$ -core of an  $s$ -core partition. *Integers*, 8:A28, 5, 2008.
- [52] Nikita A. NEKRASOV et Andrei OKOUNKOV : Seiberg-Witten theory and random partitions. In *The unity of mathematics*, volume 244 de *Progr. Math.*, pages 525–596. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.
- [53] Anil NERODE : Linear automaton transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:541–544, 1958.
- [54] John von NEUMANN : The general and logical theory of automata. *The Hixon Symposium*, 1951.
- [55] Jean-Louis NICOLAS : Valeurs impaires de la fonction de partition  $p(n)$ . *Int. J. Number Theory*, 2(4):469–487, 2006.
- [56] Jean-Louis NICOLAS : Parité des valeurs de la fonction de partition  $p(n)$  et anatomie des entiers. In *Anatomy of integers*, volume 46 de *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 97–113. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [57] Jørn B. OLSSON et Dennis STANTON : Block inclusions and cores of partitions. *Aequationes Math.*, 74(1-2):90–110, 2007.
- [58] Ken ONO : A note on the number of  $t$ -core partitions. *Rocky Mountain J. Math.*, 25(3):1165–1169, 1995.
- [59] Dominique PERRIN : Les débuts de la théorie des automates. *Technique et Science informatique*, 1995.
- [60] Mathias PÉTRÉOLLE : Characterization of cyclically fully commutative elements in finite and affine Coxeter groups. *Prépublication arXiv :1403.1130*, 28 pages, 2014.
- [61] Mathias PÉTRÉOLLE : Cyclically fully commutative generating functions are rational. *En préparation*, 2015.
- [62] Mathias PÉTRÉOLLE : Littlewood decomposition and self-conjugate partitions. *En préparation*, 2015.
- [63] Mathias PÉTRÉOLLE : A Nekrasov-Okounkov type formula for  $\tilde{C}$ . À paraître dans *DMTCS Proceedings, FPSAC conference*, 12 pages, 2015.
- [64] Mathias PÉTRÉOLLE : A Nekrasov-Okounkov type formula for  $\tilde{C}$ . *Prépublication arXiv :1505.01295*, 33 pages, 2015.
- [65] Michel QUERCIA : *Algorithmique*. Ellipses, 2002.
- [66] Hans RADEMACHER : On the partition function  $p(n)$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2(43):241–254, 1937.
- [67] Eric M. RAINS et S. Ole WARNAAR : Bounded Littlewood identities. *Prépublication arXiv :1506.02755*, 91 pages, 2015.
- [68] Craige SCHENSTED : Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math.*, 13:179–191, 1961.

- [69] Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER : Une théorie algébrique du codage. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 242:862–864, 1956.
- [70] Jean-Pierre SERRE : *Cours d'arithmétique*, volume 2 de *Collection SUP : "Le Mathématicien"*. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
- [71] Jean-Pierre SERRE : Sur la lacunarité des puissances de  $\eta$ . *Glasgow Math. J.*, 27:203–221, 1985.
- [72] Neil J. A. SLOANE : The on-line encyclopedia of integer sequence, 2015.
- [73] David E. SPEYER : Powers of Coxeter elements in infinite groups are reduced. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(4):1295–1302, 2009.
- [74] Richard P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.
- [75] Richard P. STANLEY : Some combinatorial properties of hook lengths, contents, and parts of partitions. *Ramanujan J.*, 23(1-3):91–105, 2010.
- [76] Richard P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 2012.
- [77] John R. STEMBRIDGE : On the fully commutative elements of Coxeter groups. *J. Algebraic Combin.*, 5(4):353–385, 1996.
- [78] John R. STEMBRIDGE : Some combinatorial aspects of reduced words in finite Coxeter groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(4):1285–1332, 1997.
- [79] John R. STEMBRIDGE : The enumeration of fully commutative elements of Coxeter groups. *J. Algebraic Combin.*, 7(3):291–320, 1998.
- [80] Jacques STERN : *Fondements mathématiques de l'informatique*. McGRAW-HILL, 1990.
- [81] Sheila SUNDARAM : The Cauchy identity for  $\mathrm{Sp}(2n)$ . *J. Combin. Theory Ser. A*, 53(2):209–238, 1990.
- [82] Bridget Eileen TENNER : Pattern avoidance and the Bruhat order. *J. Combin. Theory Ser. A*, 114(5):888–905, 2007.
- [83] Ameya VELINKER : On an exact formula formula for the coefficients of Han's generating function. *À paraître dans Ann. Comb.*, 17 pages, 2009.
- [84] S. Ole WARNAAR et Wadim ZUDILIN : Dedekind's  $\eta$ -function and Rogers-Ramanujan identities. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 44(1):1–11, 2012.
- [85] Bruce W. WESTBURY : Universal characters from the Macdonald identities. *Adv. Math.*, 202(1):50–63, 2006.



# Quelques développements combinatoires autour des groupes de Coxeter et des partitions d'entiers

**Résumé :** Cette thèse porte sur l'étude de la combinatoire énumérative, plus particulièrement autour des partitions d'entiers et des groupes de Coxeter.

Dans une première partie, à l'instar de Han et de Nekrasov–Okounkov, nous étudions des développements combinatoires des puissances (non nécessairement entières) de la fonction  $\eta$  de Dedekind, en termes de longueurs d'équerres de partitions d'entiers. Notre approche, bijective, utilise notamment les identités de Macdonald en types affines (en particulier le type  $\tilde{C}$ ), généralisant ainsi l'approche de Han en type  $\tilde{C}$ . Nous étendons ensuite avec de nouveaux paramètres les développements obtenus, grâce à de nouvelles propriétés de la décomposition de Littlewood vis à vis des partitions et statistiques considérées. Cela nous permet en particulier de déduire des formules des équerres symplectiques, ainsi que de nombreuses fonctions génératrices avec poids, une connexion avec la théorie des représentations des groupes classiques ou encore des applications en théorie des nombres comme par exemple un raffinement d'un résultat de Kostant sur le comportement des coefficients du développement de Taylor des puissances du produit eulérien.

Dans une seconde partie, nous étudions les éléments cycliquement pleinement commutatifs dans les groupes de Coxeter introduits par Boothby–Burkert–Eichwald–Ernst–Green–Macauley, qui forment une sous famille des éléments pleinement commutatifs. Nous commençons par développer une construction, la clôture cylindrique, donnant un cadre théorique qui est aux éléments cycliquement pleinement commutatifs ce que les empilements de Viennot sont aux éléments pleinement commutatifs. Nous donnons ainsi une caractérisation des éléments cycliquement pleinement commutatifs en terme de clôtures cylindriques pour n'importe quel système de Coxeter. Cette caractérisation nous permet de déterminer en termes d'expressions réduites les éléments cycliquement pleinement commutatifs dans tous les groupes de Coxeter finis ou affines, et d'en déduire dans tous ces groupes l'énumération de ces éléments, raffinée par la longueur. En utilisant la théorie des automates finis, nous montrons aussi que la série génératrice selon la longueur de ces éléments est toujours une fraction rationnelle.

**Mots clés :** Identités de Macdonald, fonction  $\eta$  de Dedekind, partitions d'entiers, groupes de Coxeter, empilements, éléments cycliquement pleinement commutatifs, automates finis.

**Image en couverture :** Illustration de la notion d'équerre principale.

